Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях

Часть 1

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по техническим специальностям

Минск 2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Авторы:
В. М. Марченко, И. К. Асмыкович, И. М. Борковская, Н. В. Бочило, Ж. Н. Горбатович, Л. Ф. Зверович, В. В. Игнатенко, Р. М. Кончиц, Н. П. Можей, О. Н. Пыжкова, Е. А. Шинкевич, А. А. Якименко

Под редакцией *В. М. Марченко*

Рецензенты:
кафедра высшей математики Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *С. А. Мазаник*);
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета *М. П. Дымков*

В93 **Высшая математика.** В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для студентов высших учебных заведений по техническим специальностям / В. М. Марченко [и др.]; под ред. В. М. Марченко. – Минск : БГТУ, 2010. – 206 с.
ISBN 978-985-530-042-8.

Учебное пособие написано в соответствии с уровневой методологией преподавания математических дисциплин. Содержит основной теоретический материал, образцы решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов, что в совокупности можно квалифицировать как теоретический и практический минимум, обеспечивающий, по мнению авторов, минимальные требования к математическому образованию инженеров.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-530-042-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-530-041-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

На современном этапе развития образовательных технологий одним из важнейших факторов повышения качества подготовки специалистов в высших учебных заведениях является рационализация учебного процесса посредством оптимальных учебных планов, программ нового поколения, новых форм и методов преподавания.

Поиски эффективных форм учебного процесса с учетом специфики личности обучаемого, предпринимаемые кафедрой высшей математики Белорусского государственного технологического университета (БГТУ) в течение многих лет, привели к разработке уровневой методологии организации учебного процесса по высшей математике. Истоки этой методологии можно найти в работах [1–4]. В сборнике задач [1] представлены три уровня сложности предлагаемых задач. Учебник [2] является, по-видимому, первым опытом в написании учебных пособий с несколькими (надо сказать, весьма сложными) уровнями глубины изложения материала. В книге [3] один и тот же материал параллельно излагается на двух уровнях (облегченном и повышенном). Пособие [4] является первым в методическом обеспечении уровневого учебного процесса по математике, разрабатываемого и внедряемого кафедрой высшей математики БГТУ.

Отметим некоторые принципиальные моменты уровневой технологии организации учебного процесса по математике в БГТУ. Весь изучаемый программный материал разбивается по темам на блоки, которые классифицируются по трем уровням: **А**, **Б**, **С**. Материал первого уровня **А** (базовый) – обязательное поле знаний по предмету, программа-минимум – уровень знаний, необходимый для успешного продолжения обучения. Второй уровень **Б** содержит задания, расширяющие представление студента об изучаемых темах, устанавливает связи между понятиями и методами различных разделов, дает их строгое математическое обоснование, а также примеры применения математических методов при решении прикладных задач. Материал **А + Б** (профильный) уровней **А** и **Б** охватывает всю стандартную программу курса по высшей математике – программу-максимум – и является достаточным для обеспечения самостоятельной (или под контролем преподавателя) работы обучаемого с учебной литературой. Его полное усвоение соответствует высшей оценке на экзамене. Уровень **С** (необязательный) содержит материал повышенной трудности, расширяющий и углубляющий классическое математическое образование инженера, – это и современные разделы математики и ее приложений, и математическое моделирование, и исследование реальных практических задач с учетом выбранной специальности, и нестандартные задачи олимпиадного характера, требующие поиска методов решения, и т. п. Материал **А + Б + С** трех уровней – углубленная программа – открывает путь исследованиям в области приложений математики. Отметим, что материал более низкого уровня не требует обращения к более высокому уровню.

Как свидетельствует опыт, студентам непросто (особенно на первом курсе и особенно в первом семестре) самостоятельно определить уровни излагаемого материала, в частности уровень **А** – тот минимальный уровень теоретических знаний и практических навыков по математике, который является «зачетным» – достаточным для успешного изучения других дисциплин, базирующихся на математике. Изложение всех уровней **А**, **Б**, **С** в одном пособии существенно увеличивает его объем, к тому же наиболее востребованным у студентов является уровень **А**. Поэтому настоящее пособие, издаваемое в двух частях, задумано как методическая помощь студентам первого курса технических специальностей втузов в усвоении обязательного уровня **А**. В первой его части из общего курса математики выделяется востребованный уровнем **А** теоретический и практический минимум в объеме материала первого семестра курса математики для технических специальностей БГТУ. Во второй части пособия будут представлены темы, изучаемые во втором семестре. Технические специальности взяты за основу, во-первых, потому, что у них годовой курс математики и, по сравнению с другими специальностями, они имеют более насыщенную программу в первых двух семестрах, и, во-вторых, потому, что все эти темы затем рассматриваются в математических курсах для других специальностей. Полное усвоение теоретического и практического минимума – теоретических сведений и практических навыков, – на наш взгляд, дает основание для успешного продолжения обучения в последующих семестрах, при этом предполагается, что глубокое овладение основными понятиями и методами высшей математики позволит студентам освоить и те дополнительные ее разделы, которые могут им понадобиться в будущем.

Структурно пособие организовано следующим образом: вначале излагаются основные теоретические сведения, затем дается решение типовых задач, после чего предлагаются задания для самостоятельной работы.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Теоретический минимум

1. Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика.
2. Операции над множествами.
3. Грани числовых множеств. Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ и их свойства.
4. Понятие отображения. Функция как отображение числовых множеств.
5. Способы задания функций одной переменной.
6. Свойства функций одной переменной.
7. Элементарные функции.

Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Под ***множеством*** понимается совокупность объектов произвольной природы. Эти объекты называются ***элементами*** множества.

Множества обозначаются обычно заглавными латинскими буквами: A, B, C и т. д., а их элементы – строчными: a, b, c, ...

При описании множеств их элементы, как правило, заключаются в фигурные скобки, например запись

$$\boxed{A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}}$$

означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

В случае, когда объект a является элементом или объект b не является элементом множества A, используются соответствующие обозначения:

$$\boxed{a \in A, b \notin A,}$$

что читается: элемент a принадлежит множеству A, элемент b не принадлежит множеству A, например $1 \in \{-1, 0, 1\}$, $5 \notin \{-1, 0, 1\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

При описании множеств, состоящих из элементов x некоторого множества X, обладающих определенным общим для этих элементов свойством $F(x)$, часто используются обозначения

$$\boxed{\{x|\ F(x),\ x\in X\}\ \text{или}\ \{x:\ F(x),\ x\in X\},}$$

например $\{x|\ x^2>2,\ x\in\mathbb{R}\}$.

Множества A и B называются ***равными***, что обозначается $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В таком случае записывают $A\subset B$ и говорят, что множество A содержится в множестве B (или множество B содержит множество A). Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Например, $A=\{-1,\ 4\}\subset B=\{-1,\ 4,\ 8,\ 10\}$.

Если множество состоит из ***конечного*** числа элементов, оно называется ***конечным***, в противном случае – ***бесконечным***.

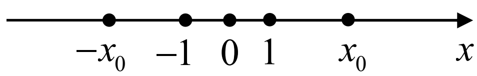
Основные числовые множества

$\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ ...,\ n,\ ...\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...,\ \pm n,\ ...\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{m}{n}\Big|\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ – множество рациональных чисел – множество конечных и периодических десятичных дробей;

$\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел – множество периодических и непериодических десятичных дробей – числовая ось (прямая):



$\mathbb{R}_+=\{x|\ x\in\mathbb{R},\ x>0\}$ – множество положительных действительных чисел;

$\mathbb{R}_-=\{x|\ x\in\mathbb{R},\ x<0\}$ – множество отрицательных действительных чисел;

$[a;\,b]=\{x|\ x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b\}$ – замкнутый (числовой) промежуток – отрезок с концами a и b;

$(a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ – открытый промежуток – интервал с концами a и b;

$[a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$ – полуинтервал (замкнутый слева и открытый справа);

$(a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$ – полуинтервал (замкнутый справа и открытый слева).

Важнейшее свойство действительных чисел – свойство непрерывности (принцип вложенных промежутков): если имеется множество замкнутых промежутков, каждый последующий из которых является подмножеством предыдущего, то найдется по крайней мере одно действительное число, принадлежащее всем промежуткам.

Если элементы бесконечного множества можно пересчитать – пронумеровать, т. е. поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел, то такое множество называется ***счетным***. Можно показать, что множества целых и рациональных чисел являются счетными, а множество действительных чисел не является счетным.

Логическая символика приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Логическая символика

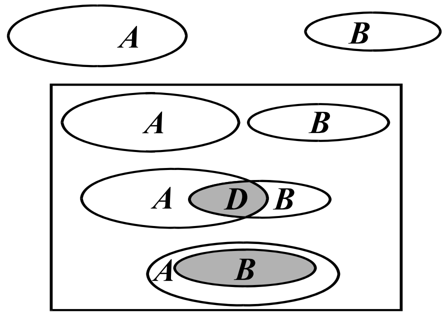
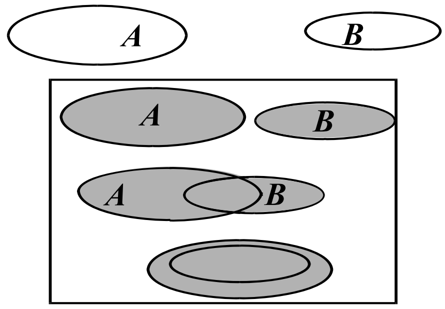
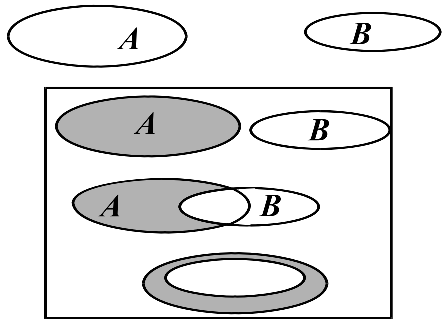
Символ	Название	Пример применения	Читается
$\wedge$	Конъюнкция	$A \wedge B$ истинно, когда и A, и B истинны	«A и B»
$\vee$	Дизъюнкция	$A \vee B$ истинно, когда A или B или A и B истинны	«A или B»
$\Rightarrow$	Импликация, следование	$A \Rightarrow B$ (если A истинно, то B истинно)	«Из A следует B», «B – следствие A»
$\Leftrightarrow$	Эквивалентность, равносильность	$A \Leftrightarrow B$ (A равносильно B)	«A тогда и только тогда, когда B», «A эквивалентно B»
$\forall$	Квантор общности	$\forall x:\ A(x)$	«Для любого x справедливо $A(x)$»
$\exists$	Квантор существования	$\exists x : A(x)$	«Существует такое x (хотя бы одно), что справедливо $A(x)$»

Операции над множествами

Операции над множествами представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Операции над множествами

Операция	Пример
Пересечением (***произведением***) множеств A и B называется множество $A \cap B$, содержащее элементы, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B. $A \cap B = \left\{ x \middle\| \; x \in A \;\wedge\; x \in B \right\}$. Множества A и B называются ***непересекающимися***, если $A \cap B = \varnothing$	 $A \cap B = \varnothing$, $A \cap B = D$, $A \cap B = B$
Объединением (***суммой***) множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств, т. е. множеству A или B или множеству A и множеству B, если таковые имеются. $A \cup B = \left\{ x \middle\| \; x \in A \;\vee\; x \in B \right\}$	
Разностью $A \setminus B$ множеств A и B (***дополнением*** $\boldsymbol{C_{AB}}$ множества B до множества A в случае $B \subset A$) называется множество, состоящее из элементов множества A, которые множеству B не принадлежат. Если ясно, о каком множестве A идет речь, вместо C_{AB} используется обозначение $\overline{B}$. $A \setminus B = \left\{ x \middle\| \; x \in A \;\wedge\; x \notin B \right\}$	

Пример. Пусть $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9\}$ и $Y = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, тогда $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ и $X \cap Y = \{1, 3\}$, $X \setminus Y = \{0, 2, 9\}$.

Операции объединения и пересечения множеств обладают свойствами:

1) коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

2) ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3) дистрибутивность: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

4) законы двойственности: $\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$;

5) $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называется множество упорядоченных (первый из первого, второй из второго множеств) пар элементов X и Y, т. е.

$$\boxed{X \times Y = \left\{(x,\, y) \middle|\, x \in X,\, y \in Y\right\}.}$$

Пример. Декартово произведение двух числовых осей (прямых) – числовая плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ – множество упорядоченных пар действительных чисел. Аналогично $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ – множество упорядоченных троек действительных чисел – трехмерное пространство. Более общо: $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n = \left\{(x_1,\, \ldots,\, x_n) \middle|\, x_i \in \mathbb{R},\, i = 1,\, \ldots,\, n\right\}$ – n-мерное числовое (евклидово) пространство.

Грани числовых множеств. Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ и их свойства

Множество $A \subset \mathbb{R}$ считается ***ограниченным сверху***, если существует число $b \in \mathbb{R}$, называемое ***верхней границей*** множества A, такое, что $a \le b$ для всех $a \in A$.

Очевидно, что существует бесконечное множество верхних границ, т. к. любое число $b_1 > b$ тоже является верхней границей множества A. Наименьшая среди верхних границ ограниченного сверху множества называется ***точной верхней гранью*** множества A и обозначается $\sup A$ (от лат. *supremum* – наивысшее). Например, множество правильных дробей A ограничено сверху числом единица, причем $\sup A = 1$.

Аналогично определяется множество, ***ограниченное снизу***, а также его нижняя и точная нижняя грани. Обозначается точная нижняя грань $\inf A$ (от лат. *infimum* – наинизшее).

Множество называется ***ограниченным***, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Если множество A не ограничено сверху, то, по определению, полагаем, что $\sup A = +\infty$; если множество A не ограничено снизу, то полагаем $\inf A = -\infty$. Эти понятия можно ввести и формальным образом как формальные символы, удовлетворяющие следующим условиям (постулатам):

1) $-\infty < x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R};$

2) $x + (\pm\infty) = \pm\infty;\ x - (\pm\infty) = \mp\infty;$

3) $x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < x < +\infty, \\ \mp\infty, & -\infty < x < 0; \end{cases}$

4) $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Аналогично символ ∞:

1) $\dfrac{x}{\infty} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$

2) $x \cdot \infty = \infty,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

3) $\dfrac{x}{0} = \infty,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Выражения $\infty - \infty$ (разность бесконечностей одного знака), $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 и т. д. считаются неопределенными (***неопределенностями***) и обычно обозначаются $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и т. д.

Иногда бывает удобно расширить числовую прямую, рассматривая в качестве ее элементов наряду с числами (конечными точками) и символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ (вместе или по отдельности) – несобственные (бесконечные точки). Все такие числовые множества объединяются под общим названием ***расширенной числовой прямой***.

Понятие отображения. Функция как отображение числовых множеств

Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие (по некоторому правилу f) единственный элемент y множества Y, то говорят, что задано ***отображение*** множества X в множество Y, которое обозначается $f: X \to Y$, или $X \xrightarrow{f} Y$, или $y = f(x)$, $x \in X$. Здесь X – ***множество определения*** (обозначается D_f), $R_f = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ – ***множество значений***, $\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y : y = f(x),\ \exists x \in X\}$ – ***график отображения*** f, $f(x)$ – ***значение отображения*** f в точке $x \in D_f$.

Под ***функцией*** будем понимать отображение числовых множеств.

Примеры:

1) m-вектор-функция n переменных: $y = f(x)$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;

2) скалярная функция n переменных: $y = f(x)$, где $y \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;

3) m-вектор-функция скалярной переменной: $y = f(x)$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}$;

4) действительнозначная функция действительной переменной (функция одной переменной): $y = f(x)$, где $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Остановимся более подробно на функциях одной действительной переменной, которые будем называть просто функциями.

Рассмотрим функцию $y = y(x), x \in X \subset \mathbb{R}$, т. е. правило, по которому каждому действительному числу *x* поставлено в соответствие действительное число *y*. Тогда величина *x* называется аргументом функции *y*, или ***независимой*** переменной, а *y* – ***зависимой*** переменной. При этом говорят, что *y* есть ***функция*** величины *x* или что величины *x* и *y* связаны между собой ***функциональной зависимостью***. ***Графиком*** этой зависимости (функции) является множество всех точек $(x; y)$ плоскости *Oxy*, для каждой из которых значение аргумента *x* является абсциссой, а значение $y = y(x)$ функции – ординатой.

Функция $y = y(n) = y_n, n \in \mathbb{N}$ натурального аргумента, т. е. функция, определенная на множестве натуральных чисел, называется ***последовательностью*** и записывается $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ или кратко $\{y_n\}$. Элементы $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ этого множества называются ***членами последовательности***. Если значения $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ – числа, то такая последовательность называется ***числовой***.

Примеры:

1) $\{-1, 1, -1, ..., -1, 1, ...\}$ или $y_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$;

2) $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$.

Зачастую функция задается только зависимостью $y = f(x)$. Тогда под ее множеством определения понимают ***естественную область определения*** E_f, т. е. множество всех тех действительных *x*, для которых $f(x)$ имеет смысл.

Способы задания функций одной переменной

Задать функцию – это, по существу, указать множество ее определения и правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находятся соответствующие ему значения функции.

Распространены три основных способа задания функции:

1) ***табличный*** – с помощью таблицы, при котором перечисляются значения независимой переменной и соответствующие им значения функции, например

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	1	4	9	3,14	2010

Правило f: каждому $x \in X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ соответствует, согласно таблице, единственное число y из $\{1, 0, 1, 4, 9, 3{,}14, 2010\}$.

Такие функции часто получаются в результате записи эмпирических исследований;

2) ***графический*** – с помощью графика, при котором непосредственно задают график функции в соответствующей системе координат и по значению независимой переменной находят значение функции (рис. 1.1).

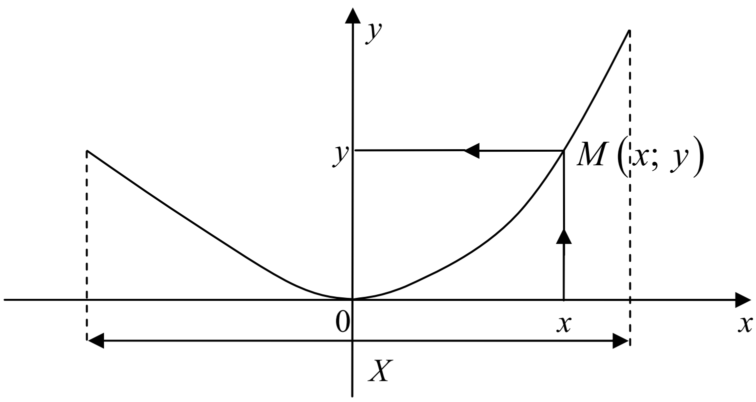


Рис. 1.1. Графический способ задания функции

В этом способе правило f заключается в следующем: на оси Ox берется любая точка с абсциссой $x \in X$, через которую параллельно оси Oy проводится прямая до пересечения с графиком функции в точке M, через точку M параллельно оси Ox проводится прямая до пересечения с осью Oy в точке с координатой y, в результате получаем зависимость $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$;

3) ***аналитический***, который в свою очередь имеет три разновидности:

– ***явный*** (способ задания) – с помощью одного или нескольких аналитических выражений $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, например

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in X = [0; 1]$; 2) $y = |x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{x}, & |x| \ge 1; \end{cases}$

– ***неявный***, т. е. с помощью уравнения $F(x; y) = 0$, $x \in X$, $y \in Y$, решая которое относительно y или x получим неявно заданную функцию $y = y(x)$ или $x = x(y)$ соответственно, например

1) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x \in X = [0; 1]$, $y \in Y = [0; 1]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x и $x = x(y)$ как неявную функцию y);

2) $x^2 + y^2 = 1$, $x \in X = [-1; 1]$, $y \in Y = [-1; 0]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x);

3) $x + y^2 = 1$, $x \in X = [0; 1]$, $y \in Y = [0; 1]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x и $x = x(y)$ как неявную функцию y);

– ***параметрический*** – с помощью системы $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in T = [t_0; t_1]$,

содержащей переменные x, y и параметр t, исключая который получаем $y = y(x)$ как функцию x или $x = x(y)$ как функцию y, например

1) $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases}$ $t \in [0; 1]$ ($y = \sqrt{1 - x^2}$ – функция x, $x \in [0; 1]$);

2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [\pi; 2\pi]$ ($y = -\sqrt{1 - x^2}$ – функция x, $x \in [-1; 1]$);

3) $\begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ($x = y^2 + 1$ – функция y, $y \in [0; +\infty]$).

Замечание. Отметим, что выражение $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 1]$ и $x^2 + y^2 = 1$ для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, а также $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ равносильны и задают одну и ту же функцию, но в первом случае явно, во втором – неявно, в третьем – параметрически.

Рассмотрим далее выражение $x^2+y^2=1,\ x\in[-1;\,1],\ y\in[-1;\,1]$. В этом (общем) случае оно не определяет ни *y* как неявную функцию *x*, ни *x* как неявную функцию *y*. Существует бесконечное число функций вида $y=y(x)$ таких, что $x^2+\left(y(x)\right)^2=1,\ x\in[-1;\,1]$, в частности $y=\sqrt{1-x^2},\ y=-\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1;\,1]$; $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1;\,0],\\ -\sqrt{1-x^2},\ x\in(0;\,1].\end{cases}$

Пусть функция $y=\varphi(x)$ отображает числовое множество $X=D_\varphi$ в множество $Y=R_\varphi$, а функция $z=f(y)$ отображает множество $R_\varphi=D_f$ в множество R_f. Тогда функция

$$z=f\left(\varphi(x)\right),$$

называемая ***сложной*** функцией, или ***суперпозицией*** (***композицией***) функций φ и *f*, определена на множестве *X* и отображает его в множество R_f.

Функция $y=\varphi(x)$ считается промежуточным аргументом (переменной) для функции $z=f\left(\varphi(x)\right)$.

Например, функцию $z=\sin 2x$ можно рассматривать как сложную, образованную суперпозицией функций $y=2x$ и $z=\sin y$.

Обратная функция

Пусть функция $y=f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством определения D_f и множеством значений R_f, т. е. каждому числу $x\in D_f$ соответствует единственное число $y\in R_f$ и наоборот. Так как при этом каждому числу $y\in R_f$ ставится в соответствие единственное число $x\in D_f$, то можно говорить, что на множестве R_f определена функция $x=f^{-1}(y)$, ***обратная*** по отношению к данной функции $y=f(x),\ x\in D_f$.

Поскольку графики функций $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ совпадают, то графики функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$, т. к. при переходе от прямой функции к обратной оси абсцисс и ординат меняются местами.

Например, функция $y=x^2$, $D_f=[-2;\,0]$, $R_f=[0;\,4]$ на отрезке $[-2;\,0]$ имеет обратную функцию $y=-\sqrt{x}$, $D_f=[0;\,4]$, $R_f=[-2;\,0]$ (рис. 1.2).

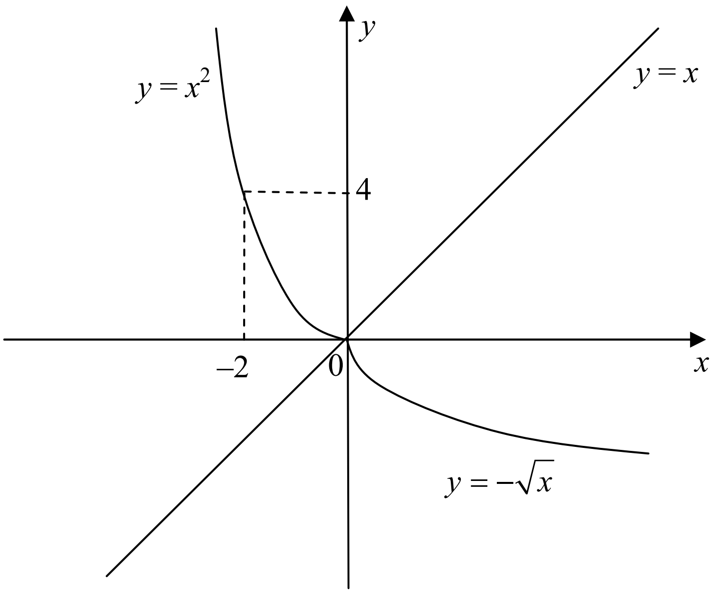


Рис. 1.2. Взаимное расположение графиков
прямой и обратной функций

Отметим, что функция $y = x^2$ на промежутке $[-2;\,2]$ не имеет обратной, т. к., например, значению $y = 1{,}8$ соответствуют два значения $x = \pm\sqrt{1{,}8}$, что нарушает однозначность соответствия между множествами D_f и R_f.

Свойства функций одной переменной

1. ***Четность и нечетность функции.*** Пусть область определения D_f функции f симметрична относительно начала отсчета. Если при этом

$$\boxed{f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f,}$$

то функция называется ***четной***, если же

$$\boxed{f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D_f,}$$

то функция называется ***нечетной***.

Из определения четности функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Например, функция $y = x^2,\ x \in [-1;\,1]$ является четной (см. ее график на рис. 1.3).

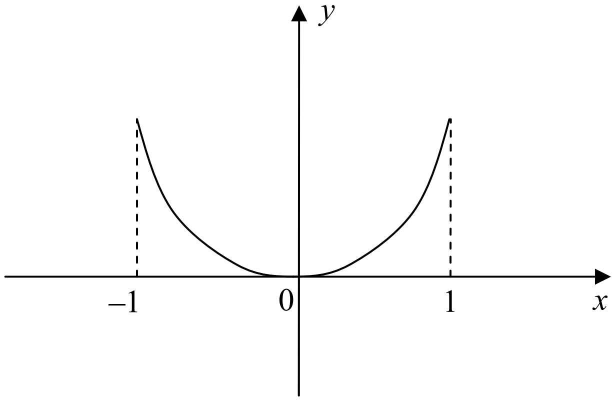


Рис. 1.3. График функции $y = x^2$, $x \in [-1;\, 1]$

Функция $y = x^3, x \in \mathbb{R}$ является нечетной (см. ее график на рис. 1.4).

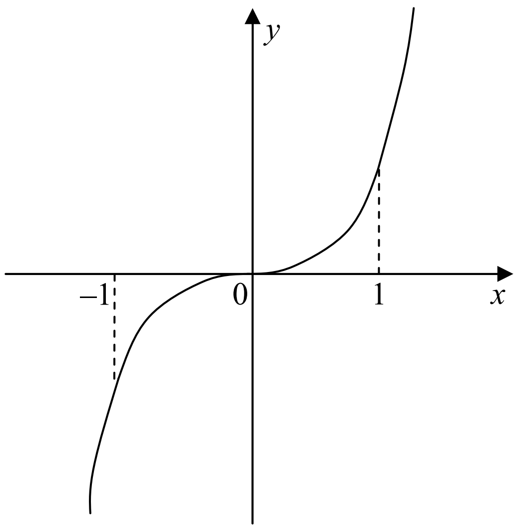


Рис. 1.4. График функции $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

Функция $y = x^2 + 2x + 1, x \in [-1;\, 1]$ не является ни четной, ни нечетной.

2. ***Периодичность функции.*** Функция $y = f(x)$ называется периодической, если для нее существует такое число $T > 0$, называемое ***периодом функции***, что при любых x из области определения функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$\boxed{f(x - T) = f(x) = f(x + T).}$$

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ с наименьшими периодами 2π и π соответственно (см. рис. 1.5, 1.6).

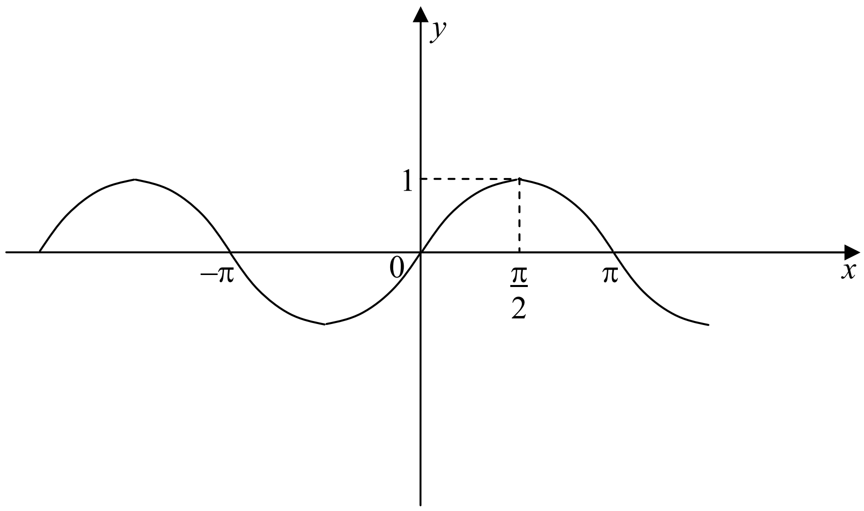


Рис. 1.5. График функции $y = \sin x$

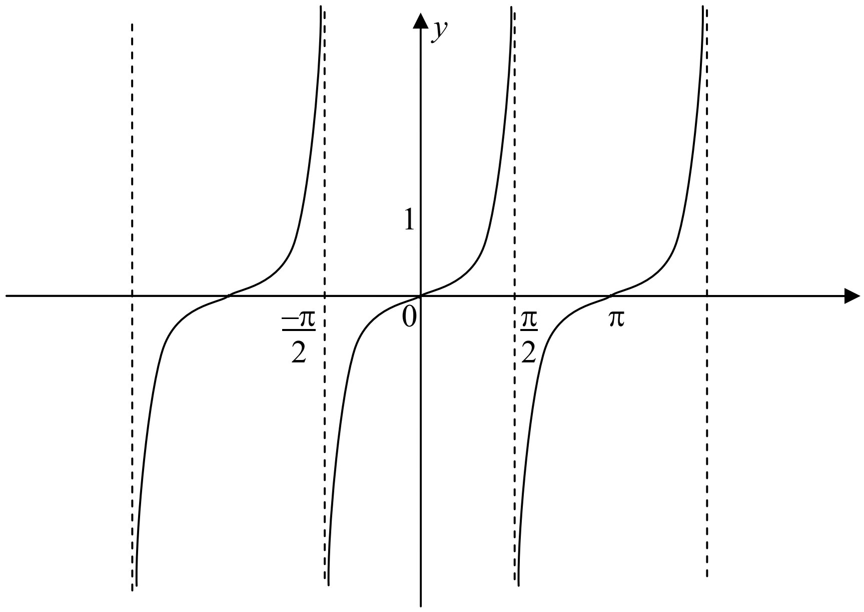


Рис. 1.6. График функции $y = \operatorname{tg} x$

3. ***Монотонность функции.*** Функция $y = f(x)$ является ***возрастающей*** (***убывающей***) на некотором множестве $A \subset D_f$, если большему значению аргумента из множества A соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$, т. е.

$$\boxed{f(x) \text{ возрастает на } A \subset D_f \Leftrightarrow \left(\forall x_1,\, x_2 \in A \subset D_f\right)\ (x_1 > x_2) \Rightarrow}$$
$$\boxed{\Rightarrow f(x_1) > f(x_2).}$$

$$\boxed{f(x) \text{ убывает на } A \subset D_f \Leftrightarrow \left(\forall x_1,\, x_2 \in A \subset D_f\right)\ (x_1 > x_2) \Rightarrow}$$
$$\boxed{\Rightarrow f(x_1) < f(x_2).}$$

Аналогично вводятся понятия неубывающей и невозрастающей функций (см. рис. 1.7, 1.8):

$$\boxed{f(x) \text{ не убывает на } A \subset D_f \Leftrightarrow \left(\forall x_1,\, x_2 \in A \subset D_f\right)\ (x_1 > x_2) \Rightarrow}$$
$$\boxed{\Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).}$$

$$\boxed{f(x) \text{ не возрастает на } A \subset D_f \Leftrightarrow \left(\forall x_1,\, x_2 \in A \subset D_f\right)\ (x_1 > x_2) \Rightarrow}$$
$$\boxed{\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).}$$

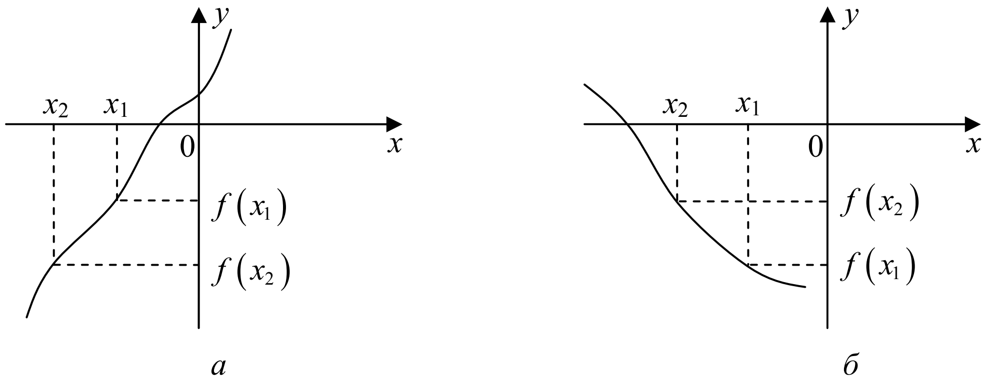


Рис. 1.7. Возрастающая (*а*) и убывающая (*б*) функции

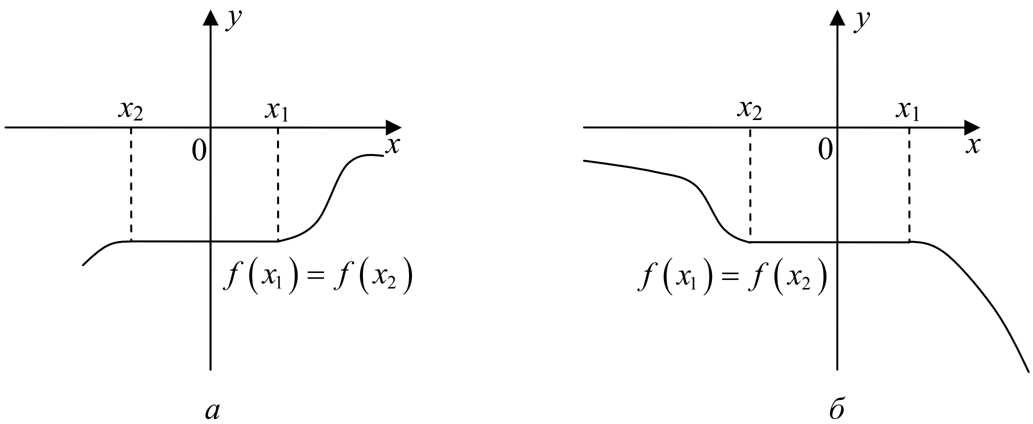


Рис. 1.8. Неубывающая (*а*) и невозрастающая (*б*) функции

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными***.

4. ***Ограниченность функции.*** Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) на множестве $A \subset D_f$, если существует такое число M, что для любых x из этого множества выполняется условие

$$\boxed{f(x) \le M \ \left(f(x) \ge M\right).}$$

Функция $y = f(x)$ считается ***ограниченной*** на множестве $A \subset D_f$, если существует такое положительное число M, что

$$\boxed{\left|f(x)\right| \le M,\ \forall x \in A.}$$

Функция, не являющаяся ограниченной, называется ***неограниченной***.

Примеры:

1) функция $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ ограничена снизу на всей числовой оси;

2) $y = x$ ограничена сверху на множестве $(-\infty; 0]$;

3) $y = \sin x$ ограничена на множестве $\mathbb{R}$.

Элементарные функции

Основные элементарные функции:

1) $y = x^\alpha$, $x \in E_f$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (степенная функция);

2) $y = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (показательная функция);

3) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \ne 1$, $x \in \mathbb{R}_+$ (логарифмическая функция);

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ (тригонометрические функции);

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$, $x \in E_f$ (обратные тригонометрические функции).

Приведем графики некоторых элементарных функций:

– степенная функция (рис. 1.9);

– показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$ (рис. 1.10);

– логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \ne 1$ (рис. 1.11);

– тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ (рис. 1.12);

– обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$ (рис. 1.13).

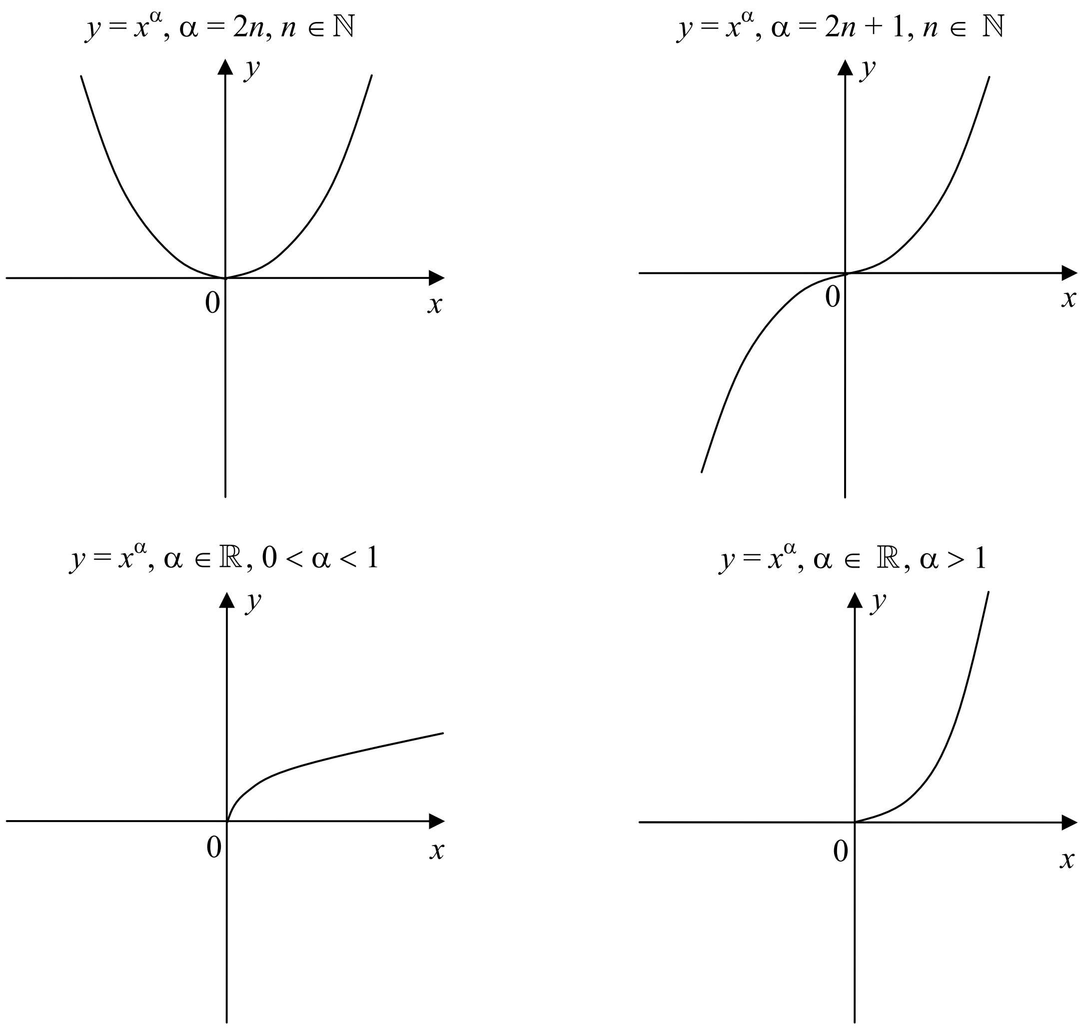


Рис. 1.9. Графики степенной функции

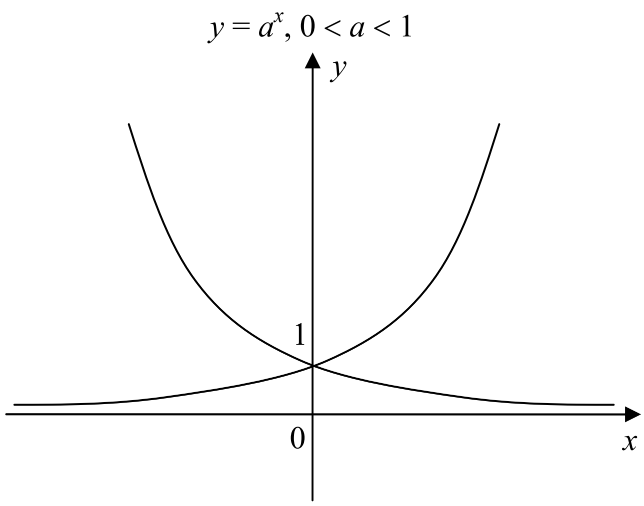


Рис. 1.10. График показательной функции

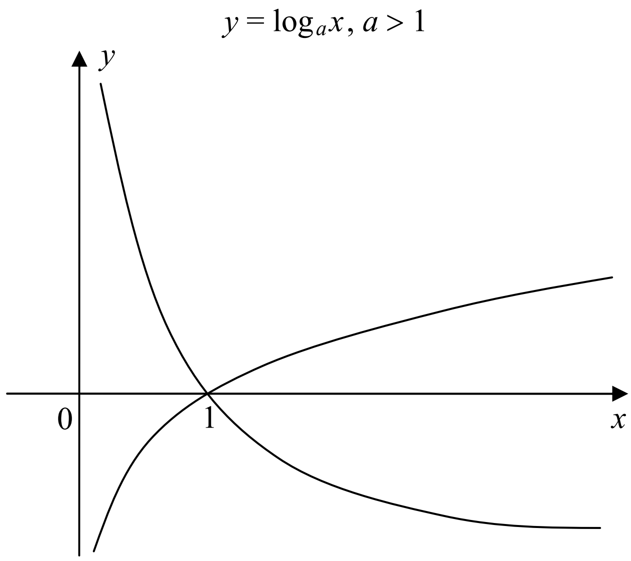


Рис. 1.11. График логарифмической функции

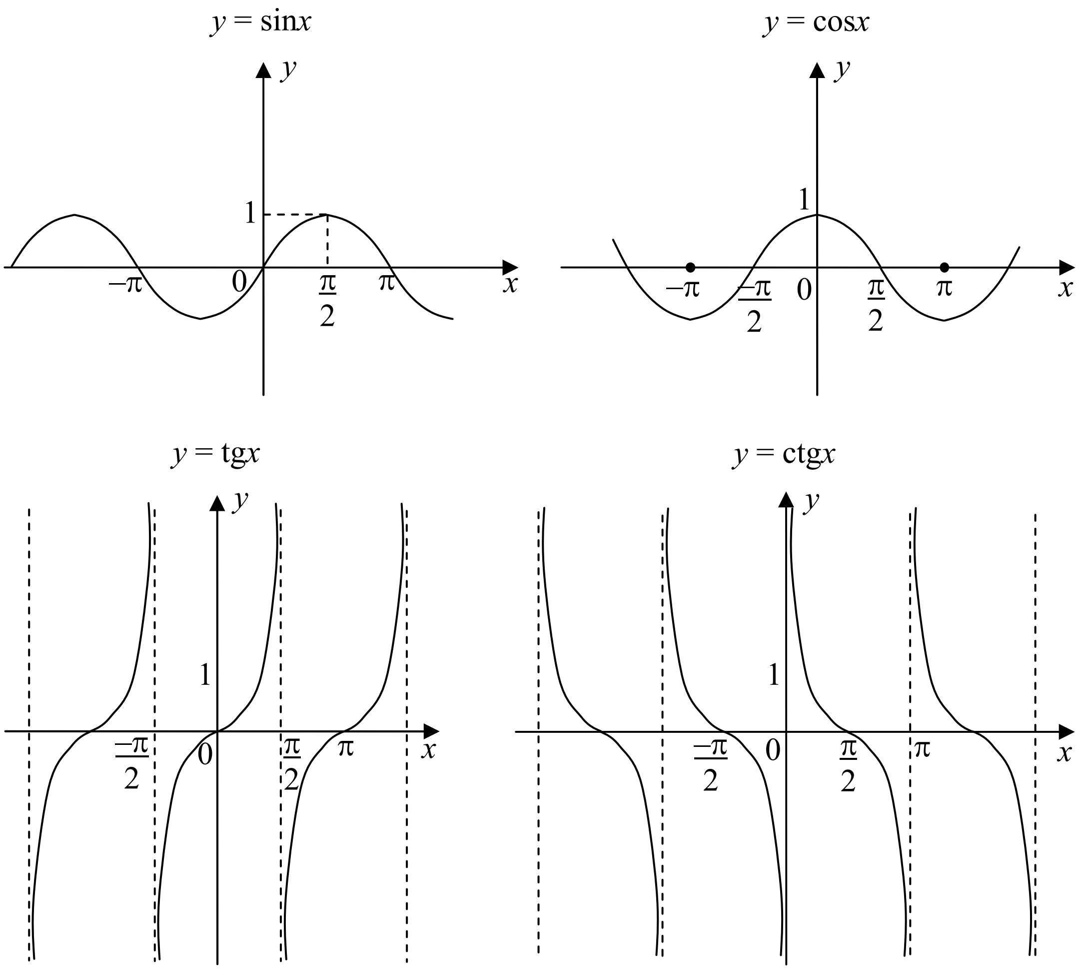


Рис. 1.12. Графики тригонометрических функций

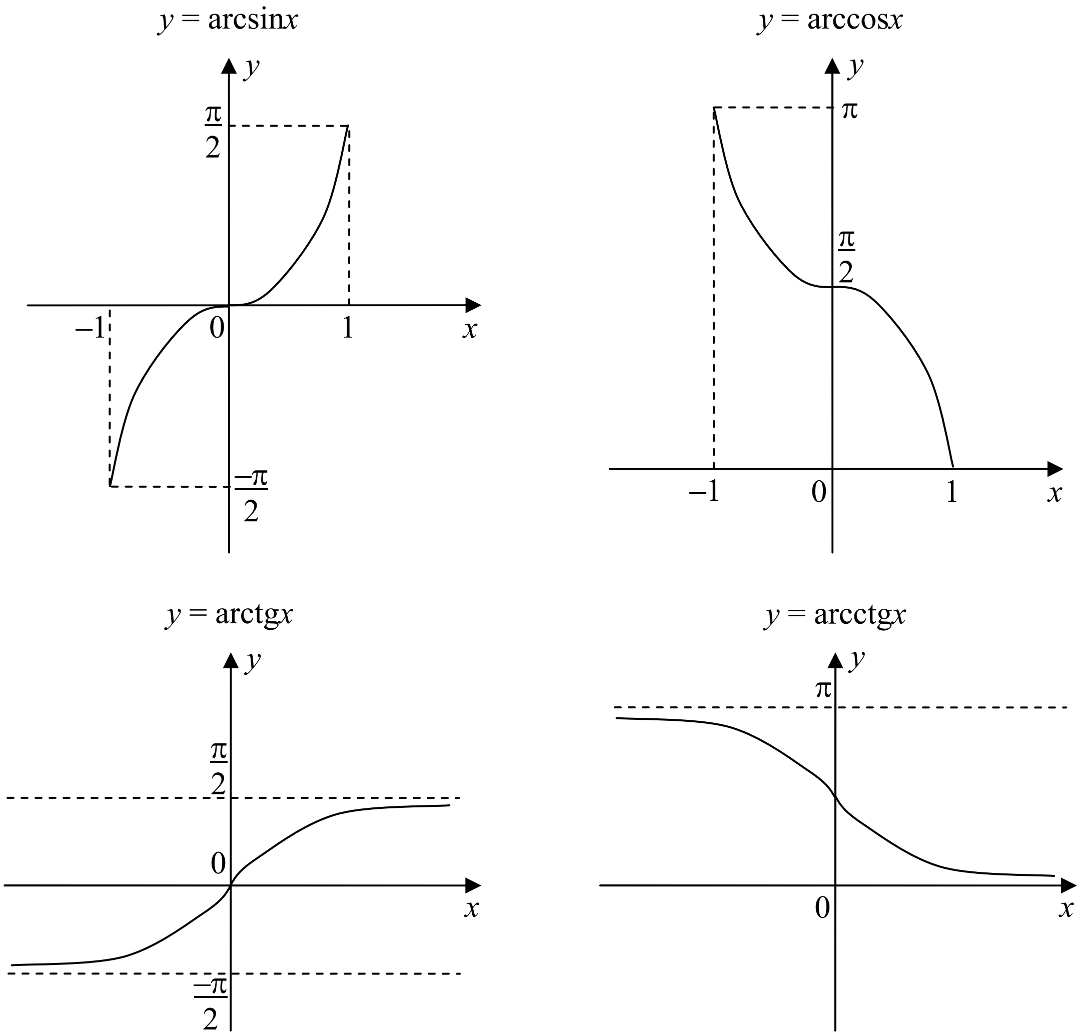


Рис. 1.12. Графики обратных тригонометрических функций

Элементарными функциями называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) с применением действительных коэффициентов и образованием сложной функции.

Некоторые элементарные функции:

1) ***линейная функция*** $y = ax + b$;

2) ***квадратичная функция*** $y = ax^2 + bx + c$;

3) многочлены с действительными коэффициентами (***целые рациональные функции***) $P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$;

4) ***дробно-рациональные функции*** (рациональные дроби) – отношение многочленов:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)};$$

5) ***иррациональные функции*** **–** функции, в которых используется операция извлечения корня.

Некоторые неэлементарные функции:

1. $y=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1,\ x>0,\\ 0,\ x=0,\\ -1,\ x<0.\end{cases}$

2. Дробная часть $y=\{x\}=x-[x]$, где $[x]$ означает целую часть x.

3. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1,\ x-\text{ рациональное},\\ 0,\ x-\text{иррациональное}.\end{cases}$$

1.2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1.2.1. Теоретический минимум

1. Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек.
2. Понятие предела функции. Односторонние пределы.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Замечательные пределы.
6. Вычисление пределов.
7. Раскрытие некоторых видов неопределенностей.

Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек

Окрестностью $B(a)$ точки $a\in\mathbb{R}$ (конечной точки) называется любой интервал, содержащий эту точку:

$$\boxed{B(a)=(\alpha;\ \beta)\ni a.}$$

ε*-окрестностью* $B_\varepsilon(a)$ точки a при $\varepsilon>0$ называется интервал вида $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ (рис. 1.13).

Рис. 1.13. Окрестности точки a

Если из окрестности $B(a)$ или $B_\varepsilon(a)$ саму точку $a \in \mathbb{R}$ удалить, то получим соответственно проколотую $\hat{B}(a)$ или $\hat{B}_\varepsilon(a)$ окрестность этой точки.

$$\hat{B}(x_0) = (\alpha;\ a) \cup (a;\ \beta); \quad \hat{B}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon;\ a) \cup (a;\ a+\varepsilon).$$

Окрестность бесконечно удаленной точки:

$B(+\infty) = (p;\ +\infty) = \{\forall x \in \mathbb{R}: x > p\}$, p – любое действительное число (рис. 1.14, *а*);

$B(-\infty) = (-\infty;\ q) = \{\forall x \in \mathbb{R}: x < q\}$, q – любое действительное число (рис. 1.14, *б*);

$B(\infty) = (-\infty;\ q) \cup (p;\ +\infty)$, $q < p$ – любые действительные числа (рис. 1.14, *в*);

$B_\varepsilon(\infty) = (-\infty;\ -\varepsilon) \cup (+\varepsilon;\ +\infty) = \{\forall x \in \mathbb{R}: |x| > \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ (рис. 1.14, *г*).

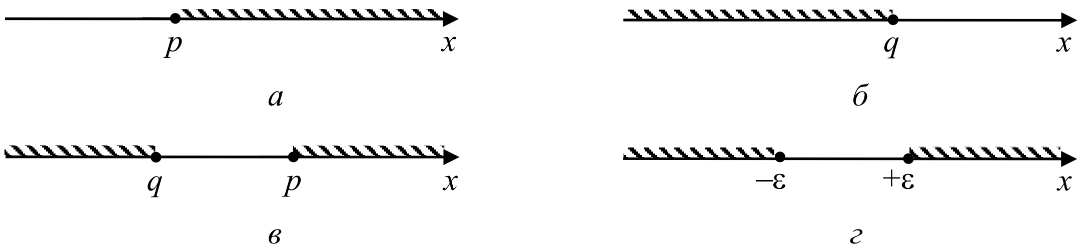


Рис. 1.14. Окрестности бесконечно удаленной точки

Понятие предела функции. Односторонние пределы

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\hat{B}(a)$ точки *a*.

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любой окрестности $B(b)$ точки *b* найдется такая проколотая окрестность $\hat{B}(a)$ точки *a*, что как только $x \in \hat{B}(a)$, то $f(x) \in B(b)$, что обозначается $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$ ($f(x)$ стремится к *b* при *x*, стремящемся к *a*).

Коротко определение предела можно записать с помощью логической символики:

$$\boxed{b = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall B(b)\, \exists \hat{B}(a)\ \left(x \in \hat{B}(a) \Rightarrow f(x) \in B(b)\right).}$$

Здесь точки *a*, *b* могут быть как конечные, так и бесконечные, что приводит к некоторым частным понятиям предела.

Примеры:

1) ***конечные пределы в конечной точке*** $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$. В этом случае в качестве окрестностей точек a и b можно взять δ- и ε-окрестности, и тогда определение предела удобно записывается на языке «ε – δ»:

$$\boxed{b = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).}$$

Таким образом, число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (рис. 1.15).

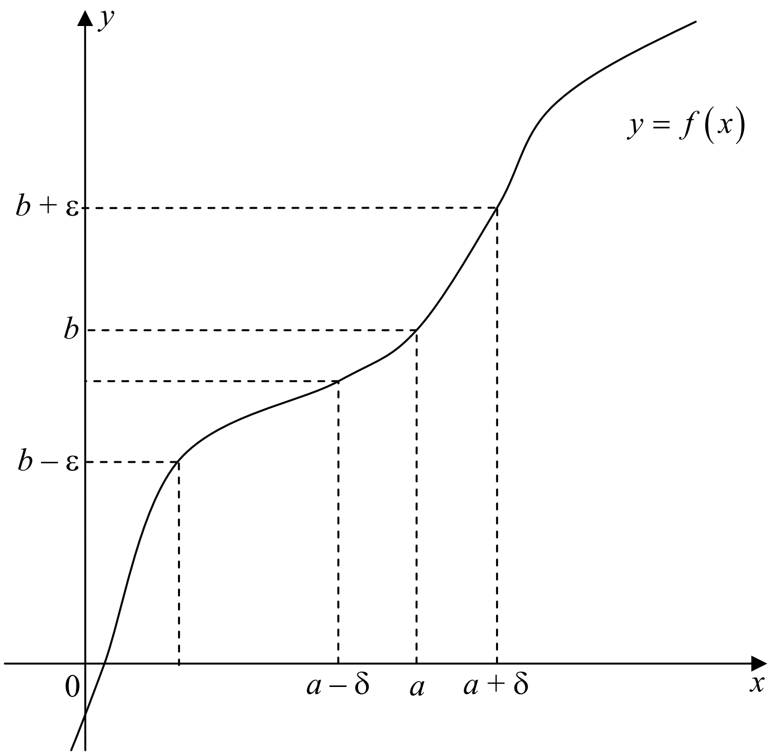


Рис. 1.15. Выбор окрестности точки a по заданной ε-окрестности точки b

2) ***конечные пределы на бесконечности*** $(b \in \mathbb{R})$. В частности,

$$\boxed{b = \lim_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \left(x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).}$$

Таким образом, число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (рис. 1.16).

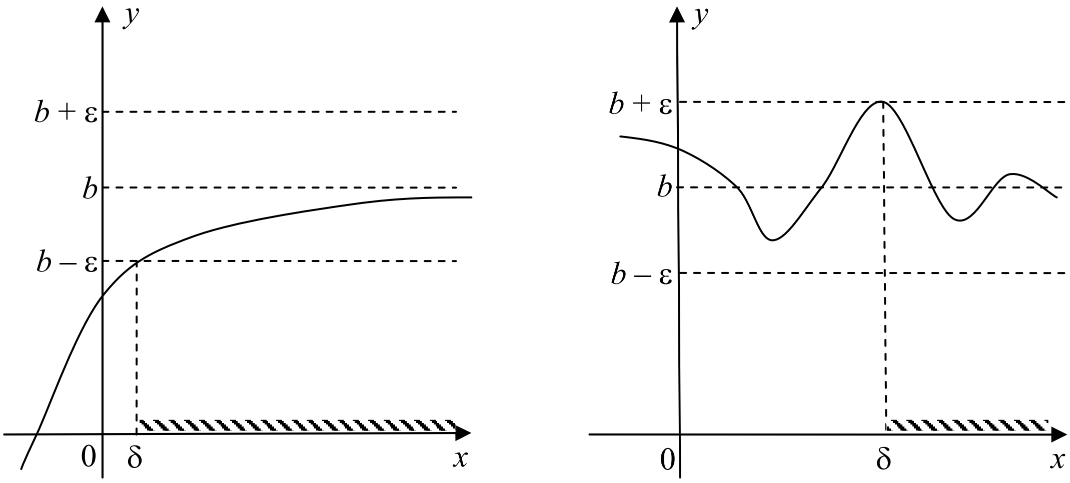


Рис. 1.16. Выбор окрестности бесконечно удаленной точки по заданной ε-окрестности точки b

Остальные частные случаи пределов запишем в сжатой форме с помощью логической символики:

$$\boxed{b = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon < 0 \; \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \left(x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \right);}$$

$$\boxed{b = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \left(|x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \right).}$$

3) ***бесконечные пределы в конечной точке*** $(a \in \mathbb{R})$. В этом случае в качестве окрестности точки a можно взять δ-окрестность. В частности,

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \; \delta = \delta_M > 0 \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M \right).}$$

Таким образом, функция $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет предел, равный $+\infty$, если для любого как угодно большого $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, будет выполняться неравенство $f(x) > M$ (рис. 1.17).

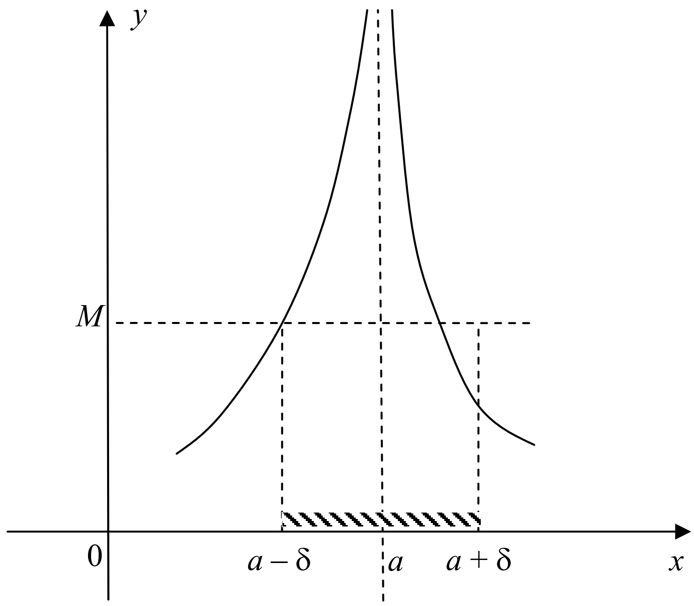


Рис. 1.17. Предел, равный $+\infty$

Остальные частные случаи пределов запишем в сжатой форме с помощью логической символики:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \exists \delta = \delta_M > 0\left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M\right);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta = \delta_M > 0\left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M\right).}$$

4) ***бесконечные пределы на бесконечности*** запишем в сжатой форме с помощью логической символики:

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\left(x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon < 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\left(x > \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon\right);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon < 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon < 0\left(x < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon\right);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon < 0\left(x < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\left(|x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\right).}$$

Важным частным случаем понятия предела функции является понятие предела последовательности.

Конечное число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что все члены этой последовательности с номерами $n > n_0(\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ (при $n \to +\infty$) и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n) имеет предел a.

Для случая последовательности часто вместо $n \to +\infty$ пишут $n \to \infty$. Таким образом,

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\left(\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right).}$$

Говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}$ ***стремится к*** $+\infty$ (аналогично к $-\infty$), что записывается $x_n \to +\infty$ (соответственно $x_n \to -\infty$), если для любого наперед заданного как угодно большого положительного числа M найдется такое натуральное число $n_0 = n_0(M)$, что для всех $n > n_0$ члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $x_n > M$ (соответственно $x_n < -M$).

Так, при $x_n \to +\infty$ можно записать:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\, n_0(M)\left(\forall n > n_0(M) \Rightarrow x_n > M\right).}$$

Отметим, что для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке a. При нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки a, отличные от a.

Поясним это на примере.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. При $x = 2$ она не определена. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$. Для этого достаточно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Имеем $|f(x) - 5| = \left|\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} - 5\right| = |(x+3) - 5| = |x - 2| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда для $|x - 2| < \varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Односторонние пределы

Если значения функции $y = f(x)$ стремятся к b_1 при $x \to a$, причем x принимает только значения меньше a, то записывают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ и b_1 называют ***пределом слева*** в точке a. Если x принимает только значения больше a, то записывают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и b_2 называют ***пределом справа*** в точке a.

$$\boxed{b_1 = \lim_{x \to a-0} f(x) \Leftrightarrow \forall B(b_1)\, \exists \hat{B}(a) \left(x \in \hat{B}(a),\ x < a \Rightarrow f(x) \in B(b_1) \right);}$$

$$\boxed{b_2 = \lim_{x \to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall B(b_2)\, \exists \hat{B}(a) \left(x \in \hat{B}(a),\ x > a \Rightarrow f(x) \in B(b_2) \right).}$$

Значения односторонних пределов обычно записывают следующим образом: предел слева – $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, предел справа – $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой (бмф)*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (т. е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая проколотая окрестность точки a, что для всех x из этой окрестности справедливо неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$).

Пример. Функция $y = 4 - x$ является *бмф* при $x \to 4$, т. к. $\lim\limits_{x \to 4}(4 - x) = 0$, а функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является *бмф* при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

Сравнение бесконечно малых функций производится путем нахождения предела их отношения. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *бмф* при $x \to a$, причем

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A.}$$

Тогда если:

1) $A=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бмф*** при $x\to a$, что записывается в виде $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

2) $A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – ***бмф одного порядка малости*** при $x\to a$;

3) $A=0$, то $\beta(x)$ есть ***бмф более высокого порядка малости***, чем $\alpha(x)$, при $x\to a$, что записывается в виде $\beta(x)=o(\alpha(x))$;

4) $A=\infty$, то $\alpha(x)$ есть ***бмф более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$, при $x\to a$, что записывается в виде $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть *бмф*.

2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть *бмф*.

3. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

4. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ и $\beta(x)\sim\gamma(x)$, то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

5. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))=o(\beta(x))$.

6. Если $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$ и $\beta(x)\sim\beta'(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$.

Следует отметить, что частное от деления *бмф* не обязательно бесконечно малая функция.

Пример. Рассмотрим функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\gamma(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. Тогда $\alpha(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$, $\beta(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$, $\gamma(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$.

Частное $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=x$ есть функция бесконечно большая при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x}$ есть *бмф* при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=1+\dfrac{1}{x}$ есть функция, имеющая конечный предел при $x\to\infty$.

Функция $y=\beta(x)$ называется ***бесконечно большой (ббф)*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a}\left|\beta(x)\right|=+\infty$.

Пример. Функция $y = 4 - x$ является *ббф* при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x \to \infty}(4 - x) = \infty$, а функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является *ббф* при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Свойства бесконечно больших функций

1. Если в некоторой проколотой окрестности точки a функция $\alpha(x) \neq 0$ и является *бмф* при $x \to a$, то $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть *ббф* при $x \to a$ и наоборот.

Эти свойства символически записываются $\left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$ и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$.

2. Произведение *ббф* на функцию $|f(x)| > M \neq 0$ есть *ббф*. В частности, произведение бесконечно больших функций есть *ббф*.

3. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть *ббф*.

4. Сумма двух *ббф* одинакового знака есть *ббф*.

Следует отметить, что разность двух *ббф* одинакового знака не обязательно бесконечно большая функция.

Пример. Рассмотрим *ббф* при $x \to \infty$: $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x^2 + x$, $\gamma(x) = x^2 + 3$, $\mu(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, $\nu(x) = x^3$.

Тогда при $x \to \infty$ разность $\beta(x) - \alpha(x) = x$ есть *ббф* при $x \to \infty$; разность $\mu(x) - \alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ есть *бмф* при $x \to \infty$; разность $\gamma(x) - \alpha(x) = 3$ есть постоянная функция.

Частное $\dfrac{\nu(x)}{\alpha(x)} = x$ есть *ббф* при $x \to \infty$; частное $\dfrac{\alpha(x)}{\nu(x)} = \dfrac{1}{x}$ есть *бмф* при $x \to \infty$; частное $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \dfrac{3}{x^2}$ есть функция, имеющая конечный предел при $x \to \infty$.

Основные теоремы о пределах

Предположим, что существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$. Тогда имеют место следующие основные свойства конечных пределов:

1. Основная теорема о (конечном) пределе: для того чтобы при $x \to a$ существовал (конечный) предел функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой (достаточно малой) проколотой окрестности $\hat{B}(a)$ предельной точки a выполнялось равенство $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – *бмф* при $x \to a$, $x \in \hat{B}(a)$, т. е.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x).}$$

2. Теорема о связи с односторонними пределами: для существования конечного предела b функции $y = f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0) = b.}$$

3. Арифметические операции над пределами:

а) $\boxed{\lim_{x \to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);}$

б) $\boxed{\lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);}$

в) $\boxed{\lim_{x \to a}\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x),}$ где $c = \text{const}$ – постоянная функция;

г) $\boxed{\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},}$ если $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

4. Лемма о сжатой переменной (двух «милиционерах»): если в некоторой окрестности $\hat{B}(a)$ для функций $f(x), u(x), g(x)$ выполняется неравенство $f(x) \leq u(x) \leq g(x)$ и существуют (конечные) пределы $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$, то существует $\lim_{x \to a} u(x)$, также равный b:

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b,\ f(x) \leq u(x) \leq g(x), \\ x \in \hat{B}(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} u(x) = b.\end{gathered}}$$

5. Предельный переход в неравенствах: если в некоторой окрестности $\hat{B}(a)$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$ и существуют (конечные) пределы, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le \lim\limits_{x\to a} g(x)$:

$$\boxed{f(x)\le g(x),\ x\in \hat{B}(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x).}$$

Следует отметить, что строгое неравенство может переходить в равенство.

Пример. Рассмотрим две функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ и $g(x)=\dfrac{1}{x}$. При $x\to\infty$ имеем строгое неравенство $f(x)<g(x)$. Однако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

6. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$, то

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.}$$

Замечательные пределы

При раскрытии неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ с выражениями, содержащими тригонометрические функции, часто используется предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,}$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Применяем первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\left[\dfrac{1}{1}\right]=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{5\cos 2x}{2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 2x}{2}=\dfrac{5}{2}.$

При раскрытии неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ часто используется предел вида

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e,}$$

называемый ***вторым замечательным пределом***, число e – предел числовой последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ – является числом иррациональным, e= 2,718281828459045... .

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.}$$

Число e играет важную роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием e $\left(y=e^{x}\right)$ называется ***экспонентой***. Логарифм по основанию e называется ***натуральным*** (или ***неперовым***) ***логарифмом*** и обозначается $\ln x$. Таким образом,

$$\boxed{\ln x=\log_e x.}$$

Из второго замечательного предела можно получить пределы, которые широко применяются для раскрытия неопределенностей:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.}$$

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+4\right)-\ln 4}{x}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{x+2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{(x+2)}{x-1}\cdot 4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}}=e^{4};$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

При нахождении предела в примере 1) мы первоначально в скобках добавили и вычли единицу, вычислили разность и разделили на четыре, затем показатель умножили и разделили на $\frac{x-1}{4}$. Другими словами, свели ко второму замечательному пределу, после чего воспользовались свойством $\lim\limits_{x\to \grave{a}} e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to \grave{a}} f(x)}$.

При нахождении предела в примере 2), выполнив необходимые преобразования, мы свели его к одному из пределов, вытекающих из второго замечательного предела.

Вычисление пределов

Отметим некоторые общие методы вычисления пределов.

1. Использование основных теорем о пределах. Поскольку для основных элементарных функций во всех точках их области определения (для элементарных функций во всех точках из интервала их области определения) имеет место свойство

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a),}$$

то при вычислении пределов, прежде всего, вместо x подставляем предельное значение (обычно это записывается в квадратных скобках) и, если значение $f(a)$ определено, применяем основные теоремы о пределах.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2^x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^{2x}\left(\cos 2x+2x^2\right)\right)$.

Решение.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2^x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+3\right)}=\left[\frac{1^2+2\cdot 1-1}{2^1+3}\right]=\frac{2}{5};$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(3^{2x}\cdot\left(\cos 2x+2x^2\right)\right)=\lim_{x\to 0}3^{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x^2\right)=$$
$$=\left[3^0\cdot\left(\cos 0+2\cdot 0\right)\right]=1\cdot 1=1.$$

Однако часто при подстановке в $f(x)$ вместо x предельного значения a получаются выражения вида $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[0\cdot\infty]$; $\left[1^{\infty}\right]$; $[\infty-\infty]$ и другие, которые называются неопределенностями и которые нужно «раскрывать» специальными методами, например учитывая характер стремления к пределу отдельных функций, составляющих (входящих) функцию $f(x)$ (см. ниже: раскрытие некоторых видов неопределенностей).

2. При вычислении пределов иногда удобно воспользоваться односторонними пределами (свойство 2).

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} \text{ при } |x|<1 \text{ и } x\neq 0,\\ x^2 \text{ при } |x|\geq 1,\end{cases}$$

при: а) $x_0=1$; б) $x_0=0$; в) $x_0=-1$.

Решение.

а) $f(x_0-0)=f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 1-0}1=1,$

$f(x_0+0)=f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}x^2=1.$

Таким образом, $f(1-0)=f(1+0)=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$;

б) $f(x_0-0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1,$

$f(x_0+0)=f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1.$

Таким образом, $f(-0)\neq f(+0)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует;

в) $f(x_0-0)=f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1-0}x^2=1,$

$f(x_0+0)=f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to -1+0}(-1)=-1.$

Таким образом, $f(-1-0)\neq f(-1+0)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует.

3. Пределы можно также вычислять ***по определению предела***, например с использованием языка «$\varepsilon-\delta$»-окрестностей, однако это, как правило, требует более основательной математической техники.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+2x+1\right)$, если $x_0=-1$.

Решение. Значение $f(-1)=0$ существует. Покажем, что $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$. Рассмотрим условие $f(x)\in B_\varepsilon(0)=(0-\varepsilon;0+\varepsilon)$, что равносильно $\left|x^2+2x+1+0\right|<\varepsilon$, или $|x+1|^2<\varepsilon$, или $|x+1|<\sqrt{\varepsilon}$. Полагая $\delta=\delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$, имеем $0<|x-(-1)|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$.

4. Использование эквивалентных бесконечно малых функций в произведениях и частном. При нахождении пределов бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными:

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\gamma(x)}{\beta(x)},\\ \text{если } f(x)\sim\alpha(x),\ g(x)\sim\beta(x),\ p(x)\sim\gamma(x).\end{gathered}}$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	2. $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
3. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.	4. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
5. $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	6. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.
7. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.	8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{4x}=\dfrac{5}{4};$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{x+x^2}{2}\\ \sin 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x+x^2}{2}}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)}{8x}=\dfrac{1}{8}.$

Раскрытие некоторых видов неопределенностей

При вычислении пределов функций удобно использовать таблицу, в которой приведены соотношения пределов суммы, произведения, частного двух функций $f(x)$ и $g(x)$, свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Действия над пределами

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
b	c	$b+c$	bc	$\dfrac{b}{c}$, если $c\neq 0$
$b\neq\infty$	∞	∞	∞, если $b\neq 0$	$\left[\dfrac{b}{\infty}\right]=0$
∞	$c\neq\infty$	∞	∞, если $c\neq 0$	$\left[\dfrac{\infty}{c}\right]=\infty$
0	0	0	0	Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
b	0	b	0	$\left[\dfrac{b}{0}\right]=\infty$, если $b\neq 0$
0	∞	∞	Неопределенность $[0\cdot\infty]$	$\left[\dfrac{0}{\infty}\right]=0$
∞	0	∞	Неопределенность $[\infty\cdot 0]$	$\left[\dfrac{\infty}{0}\right]=\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	Неопределенность $[\infty-\infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Неопределенность вида $\left[\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$

1. Использование первого замечательного предела. При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые.

Пример. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\mathrm{tg} 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}$.

Решение.

1) первый способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{\sin 7x}{7x}}}^{1}\cdot 7x}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin 5x}{5x}}}_{1}\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{5x}=\frac{7}{5}.$$

(При решении разделили каждый синус на аргумент и домножили на него и использовали первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$).

Второй способ:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{5x}=\dfrac{7}{5}$, т. к. $\sin 7x\sim 7x$, $\sin 5x\sim 5x$ при $x\to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\mathrm{tg} 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{3x}=\dfrac{7}{3}$, т. к. $\arcsin 7x\sim 7x$ при $x\to 0$, $\mathrm{tg} 3x\sim 3x$;

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\overbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 3x}{(3x)^2}}}^{1}\cdot (3x)^2}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 8x}{(8x)^2}}}_{1}\cdot (8x)^2}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 9x^2}{64x^2}=\dfrac{9}{32}$ (при вычислении предела использовали формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$).

Аналогично, используя эквивалентные при $x \to 0$ *бмф* $1-\cos 6x \sim \frac{1}{2}(6x)^2$, $\sin 8x \sim 8x$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{(8x)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 36}{64} = \frac{9}{32}.$$

2. При нахождении $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если $P(a)=Q(a)=0$, следует числитель и знаменатель дроби разделить на разность $(x-a)$ один или несколько раз, пока не исчезнет неопределенность.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. Подставляя вместо x предельное значение $x=1$, получим неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Выделим в числителе и знаменателе множитель $x-1$, для чего числитель разделим на $x-1$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2+2x+2 \\
\quad 2x^2-2 & \\
\quad \underline{2x^2-2x} & \\
\qquad 2x-2 & \\
\qquad \underline{2x-2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$.

Знаменатель разложим на множители, используя формулу

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, которые находятся по следующим формулам:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ D=b^2-4ac.$$

Решаем квадратное уравнение:

$4x^2-5x+1=0$,

$D=25-16=9$,

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 3}{8}$, $x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=1$.

Тогда $4x^2-5x+1=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x-1)=(4x-1)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{(4x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{4x-1}=\frac{5}{3}.$$

3. При раскрытии неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и (или) знаменателе следует избавиться от иррациональности путем умножения на соответствующее сопряженное выражение или производя замену переменных.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Решение.

Первый способ. При $x=4$ числитель и знаменатель дроби равны нулю. Домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю ($\sqrt{2x+1}+3$), получим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\left[\frac{2}{3+3}\right]=\frac{1}{3}.$$

В преобразованиях использовали формулу

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b.$$

Второй способ:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=t,\ x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ x\to 4,\ t\to 3\end{array}\right|=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{\dfrac{t^2-1}{2}-4}=$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{t^2-9}=\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{(t-3)(t+3)}=\lim_{t\to 3}\frac{2}{(t+3)}=\left[\frac{2}{6}\right]=\frac{1}{3}.$$

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

1. При нахождении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на x^n, где n – высшая степень этих многочленов.

Пример. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}$.

Решение.

1) разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x}+3}=\left[\frac{4+0+0}{0+0+3}\right]=\frac{4}{3};$$

2) разделим числитель и знаменатель дроби на x^5, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\left[\frac{0+0+0}{1+0+0}\right]=0.$$

2. При раскрытии неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и знаменателе дроби выделяются множители x^m, x^n, где m, n – максимально возможные показатели степеней $\left((m,n)\in\mathbb{Q}\right)$. Затем производится сокращение на $x^p\left(p=\min(m,n)\right)$.

Пример. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}$.

Решение.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}\right]=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{4+0+0}}{\sqrt[3]{1+0+0}}\right]=\left[\frac{2}{1}\right]=2;$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^3\cdot\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{|x|\cdot\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=$$

$$=\left[\infty\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}}\right]=\left[\infty\cdot 2\right]=\infty.$$

Неопределенность вида $\left[\mathbf{1}^{\infty}\right]$

Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ часто используется второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn};\ \lim_{x\to 0}\left(1+kx\right)^{\frac{n}{x}}=e^{kn}.$$

Пример. Найти пределы функций:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x};\ 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2};\ 3)\ \lim_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln x\right).$$

Решение.

1) т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}}=e^{3};$$

2) поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x+3}-1\right)^{x+2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x-3}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{x+2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2(x+2)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e;$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+3}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\ln e^{3}=3.$$

Здесь использовали свойства логарифмов и второй замечательный предел. Во всех примерах использовали свойство 6) пределов.

Неопределенности вида $\left[\infty-\infty\right]$, $\left[0\cdot\infty\right]$

Неопределенности таких видов раскрываются сведением с помощью преобразований к неопределенностям $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и другим.

Пример. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{2}+x+1}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^{2}+2x}{x^{3}-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{2}}\left(\operatorname{tg}x+2x^{2}\right)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[\infty-\infty\right]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем ее:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\left[\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+1}\right]=$$

$$=\left[\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right]=\frac{1}{2};$$

2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{x^3-1}\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x}{x^3-1}=\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[\infty-\infty\right]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x+1-x^2-2x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right).$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскроем ее:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3};$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)$. Непосредственная подстановка предельного значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $\left[0\cdot\infty\right]$. Преобразовав данное выражение, получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x+2x^2}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\left|\operatorname{tg}x\sim x\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right)+2=\infty.$$

1.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется окрестностью, ε-окрестностью, проколотой окрестностью конечной точки?
2. Что называется окрестностью бесконечно удаленной точки?
3. Дайте определение предела.
4. Приведите определение предела $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, когда: a и b – конечные числа; a – конечное $b=+\infty$; $a=+\infty$, b – конечное; $a=+\infty$, $b=+\infty$, и дайте геометрическую интерпретацию.
5. Символически запишите определение предела, когда: a – конечное, $b=-\infty$; $a=-\infty$, b – конечное; $a=+\infty$, $b=-\infty$; $a=-\infty$, $b=+\infty$, и дайте геометрическую интерпретацию.
6. Дайте определение односторонних пределов. Как записываются односторонние пределы?
7. Какая функция называется бесконечно малой? Приведите примеры *бмф*.
8. Какие *бмф* называются: эквивалентными, одного порядка малости, более высокого порядка малости?
9. Выпишите таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.
10. Перечислите основные свойства бесконечно малых функций.

11. Какая функция называется бесконечно большой? Приведите примеры *ббф*.

12. Перечислите основные свойства бесконечно больших функций.

13. Как связаны между собой *бмф* и *ббф*?

14. Дайте формулировку основных теорем о пределах.

15. Запишите первый замечательный предел.

16. Что такое число e?

17. Какая функция называется экспонентой?

18. Что такое натуральный логарифм?

19. Запишите второй замечательный предел.

20. Перечислите общие методы вычисления пределов.

21. Выпишите основные виды неопределенностей.

22. Как находится $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если $P(a)=Q(a)=0$?

23. Как раскрываются неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, если дробь содержит иррациональные выражения?

24. Как находится $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$?

25. Как раскрываются неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$?

26. Как раскрываются неопределенности вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$?

1.2.3. Практический минимум

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2-2x+1\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^2+2x+3\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^3(x+2)$.

4. $\lim\limits_{x\to -2}(x+1)^5(x+2)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+4x-1\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x^2-2x-3\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos x}{x^2+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x}-3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2-x+1\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3}{x^2+5}$.

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5}{2x^2+5x-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}$.

17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x-10}$.

18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$.

19. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2x+1}{3x^2-5x+2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-7x+6}{3x^2-8x+4}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{4-x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{x^4-81}$.

25. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2-3x+2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x+3}{2x^3+5x^2+1}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x}{x^2-3x+4}$.

31. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-3x^2}{2x^2+1}$.

32. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x+3}{x^3+x+4}$.

33. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^5+x^2+1}$.

34. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x}{x^4-3x^2+4}$.

35. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-3x^2+x^3}{2x+1}$.

36. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2-x+1}$.

37. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-10}{x^2+2x-3}$.

38. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x-10}{3x^2+2x+6}$.

39. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x+10}{3x^2-2x+5}$.

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x+1}{3x^3+2x+5}$.

41. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

42. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

43. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{4-x}$.

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2-2x}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

47. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$.

48. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{8x}-4}$.

49. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x}-2}$.

50. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6x+1}-5}$.

51. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{2x+1}$.

52. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^6+3}+4}{\sqrt{x^4-6}+x^2}$.

53. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2}+x}{3x-1}$.

54. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-6}{\sqrt{x^4+5}+3x^2}$.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sin 4x}$.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 3x}$.

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x}$.

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x\cdot\cos 2x}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos 4x}$.

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin x}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{2x}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{2x}$.

67. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x+2}$.

68. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^{3x}$.

69. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{2x}$.

70. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x+2}$.

71. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+5}\right)^{2x}$.

72. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x}$.

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{1-3x}$.

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^{-5x}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

76. $\lim\limits_{x\to 1}(6-5x)^{\frac{2}{x-1}}$.

77. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{3}{x}}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{x+1}{x}}$.

79. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2}{x}}$.

80. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg} 3x)^{\frac{2}{x}}$.

81. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{6x-3}\right)^{x}$.

82. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x+1}\right)^{x}$.

83. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+3}-x\right)$.

84. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

85. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$.

86. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x^2\right)$.

88. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+4x}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

89. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-4x+3}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$.

90. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x}-\dfrac{x-1}{x^2-x}\right)$.

Минимум для аудиторной работы

Найти пределы функций: 1; 3; 5; 7; 9; 13; 15; 19; 23; 25; 29; 30; 31; 32; 41; 45; 47; 55; 57; 59; 67; 71; 75; 83.

1.2.4. Ответы

1. 22. **2.** 10. **3.** 0. **4.** 0. **5.** $+\infty$. **6.** $+\infty$. **7.** 0. **8.** 0. **9.** ∞. **10.** ∞. **11.** $+\infty$. **12.** $+\infty$. **13.** 0. **14.** 0. **15.** $\frac{4}{3}$. **16.** –6. **17.** $\frac{4}{7}$. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** $\frac{2}{5}$. **20.** –4. **21.** ∞. **22.** –1. **23.** –3. **24.** $\frac{1}{6}$. **25.** $-\frac{11}{75}$. **26.** $-\frac{2}{3}$. **27.** 32. **28.** $\frac{5}{12}$. **29.** $\frac{1}{2}$. **30.** ∞. **31.** $-\frac{3}{2}$. **32.** 0. **33.** $\frac{1}{2}$. **34.** 0. **35.** ∞. **36.** 3. **37.** 3. **38.** ∞. **39.** $\frac{1}{3}$. **40.** 0. **41.** $\frac{1}{6}$. **42.** $\frac{1}{6}$. **43.** $-\frac{1}{6}$. **44.** $-\frac{1}{4}$. **45.** 4. **46.** $\frac{1}{2}$. **47.** $\frac{3}{2}$. **48.** $\frac{1}{4}$. **49.** $\frac{3}{2}$. **50.** $\frac{5}{12}$. **51.** 1. **52.** 1. **53.** ∞. **54.** 0. **55.** $\frac{3}{2}$. **56.** $\frac{2}{5}$. **57.** 32.

58. $\frac{1}{3}$. **59.** 4. **60.** 8. **61.** $\frac{9}{25}$. **62.** $\frac{1}{8}$. **63.** $\frac{2}{3}$. **64.** 18. **65.** $\frac{7}{2}$. **66.** 2. **67.** e^{-3}.
68. $e^{\frac{3}{2}}$. **69.** e^{-14}. **70.** e^{-4}. **71.** $e^{\frac{4}{3}}$. **72.** e^{-4}. **73.** e^{-3}. **74.** $e^{\frac{15}{2}}$. **75.** e^{-6}.
76. e^{-10}. **77.** e^{-21}. **78.** e^{-5}. **79.** e^{4}. **80.** e^{-6}. **81.** 0. **82.** ∞. **83.** 3. **84.** 0.
85. 0. **86.** $\frac{3}{2}$. **87.** $-\infty$. **88.** $\frac{1}{6}$. **89.** $-\frac{4}{3}$. **90.** 4.

1.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1.3.1. Теоретический минимум

1. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.
2. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда функция $y=f(x)$ получит приращение $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (рис. 1.18).

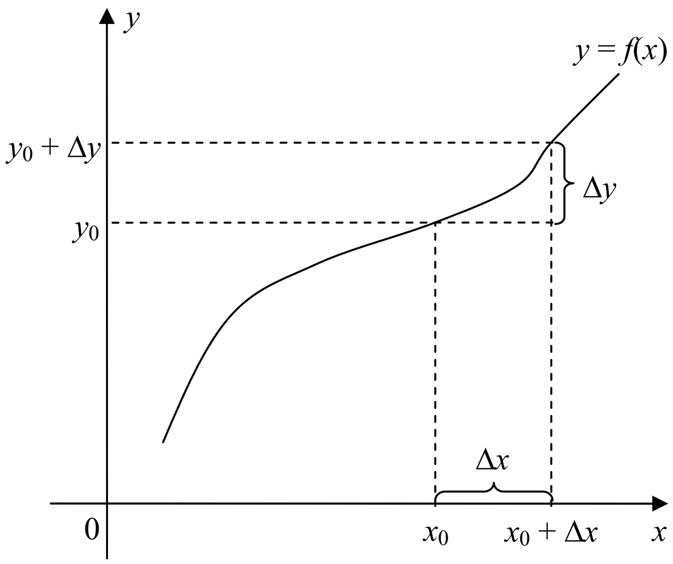


Рис. 1.18. Приращение функции

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из второго условия вытекает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и конечен. Это равносильно существованию предела $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$. Таким образом, второе условие в определении означает, что

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0,$$

т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (определение непрерывности на языке приращений).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то условие 1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) = f(x_0)\cdot$$

Это означает, что для непрерывной функции знаки предела и функции можно переставлять.

Пример. Доказать, что функция $y = x^3$ непрерывна в любой точке области определения, т. е. в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx в точке x_0 и найдем приращение функции Δy:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 +$
$+ (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Следовательно,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \right) = 3x_0^2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + 3x_0 \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 +$
$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^3 = 3x_0^2 \cdot 0 + 3x_0 \cdot 0 + 0 = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это и означает, что функция $y = x^3$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (или правосторонней) окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

(аналогично $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0)$), то функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***слева*** (соответственно ***справа***).

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в ней слева и справа.

Отсюда получаем удобный на практике ***критерий (условия) непрерывности***.

$f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ в том и только том случае, если: 1) функция определена в точке x_0; 2) односторонние пределы $f(x_0-0), f(x_0+0)$ функции в точке x_0 существуют, равны между собой и равны значению функции в этой точке: $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$.

Пример. Исследовать на непрерывность в точке $x = 1$ следующие функции:

1) $y = \dfrac{3}{x-1}$; 2) $y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ 3) $y = x^2 - 5$.

Решение.

1) функция $y = \dfrac{3}{x-1}$ определена в окрестности точки $x = 1$, но в самой точке $x = 1$ она не определена, следовательно, в этой точке она не является непрерывной (не выполнено первое условие непрерывности);

2) для исследования на непрерывность воспользуемся условиями непрерывности. В точке $x = 1$ функция $y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$ определена ($f(1) = 1^2 = 1$), т. е. первое условие непрерывности выполнено; второе условие также выполняется: $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0}(x-2) = -1$; $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1 = f(1)$; третье условие непрерывности не выполняется, т. к. $f(1-0) \neq f(1+0)$. Следовательно, данная функция не является непрерывной в точке $x = 1$, однако функция непрерывна в точке $x = 1$ справа;

3) функция $y = x^2 - 5$ является непрерывной в точке $x = 1$, т. к. выполнены все три условия непрерывности: она определена в точке $x = 1$ и ее окрестности; существуют односторонние

пределы $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -4$; эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1) = -4$.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их арифметические комбинации: $f(x) \pm g(x)$, $c \cdot f(x)$ (с – постоянная), $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии что $g(x_0) \neq 0$), также непрерывны в точке x_0.

2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

2. Элементарные функции непрерывны на каждом из интервалов, целиком лежащих в области определения.

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке (первая теорема Вейерштрасса).

4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она достигает своего наименьшего значения $f_{\text{нм}}$ и наибольшего значения $f_{\text{нб}}$ (вторая теорема Вейерштрасса) (рис. 1.19).

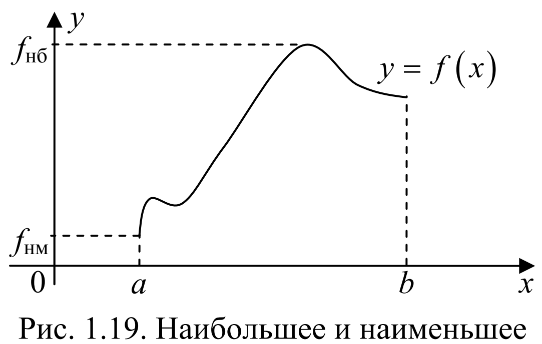


Рис. 1.19. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции

5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c \in [a;\ b]$, что $f(c) = C$ (теорема Коши о промежуточном значении) (рис. 1.20).

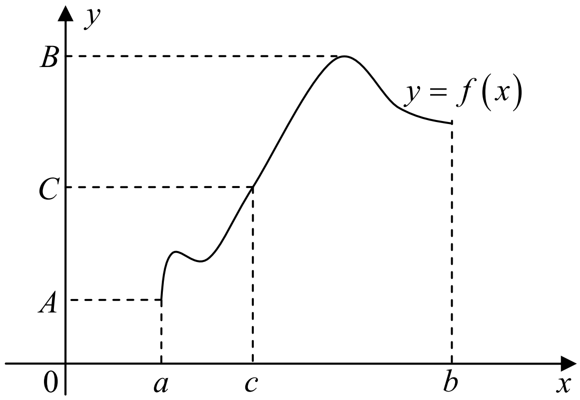


Рис. 1.20. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции

Точки разрыва функции и их классификация

Если для функции $y = f(x)$, определенной по крайней мере в некоторой проколотой окрестности точки x_0, не выполняется хотя бы одно из условий критерия непрерывности, то точка называется ***точкой разрыва функции***.

Точки разрыва функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется точкой:

1) ***устранимого разрыва*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют односторонние конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, они равны между собой: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но сама функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0 или определена, но ее значение не равно односторонним пределам: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$;

2) ***конечного разрыва*** (скачка) функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, но они не равны между собой: $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (рис. 1.22, точка $x_1 = 0$);

3) ***бесконечного разрыва*** (скачка) функции $y = f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен (рис. 1.23, точка $x_1 = -4$);

4) ***несуществования***, если не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или значение сделать равным односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной.

Пример 1. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Здесь $x_0 = 0$ – точка разрыва: в этой точке функция не определена, существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0) = f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $f(x_0 + 0) = f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, равные между собой. Точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва. Если эту функцию доопределить в точке $x = 0$, то полученная функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ станет в точке $x_0 = 0$ непрерывной (см. рис. 1.21).

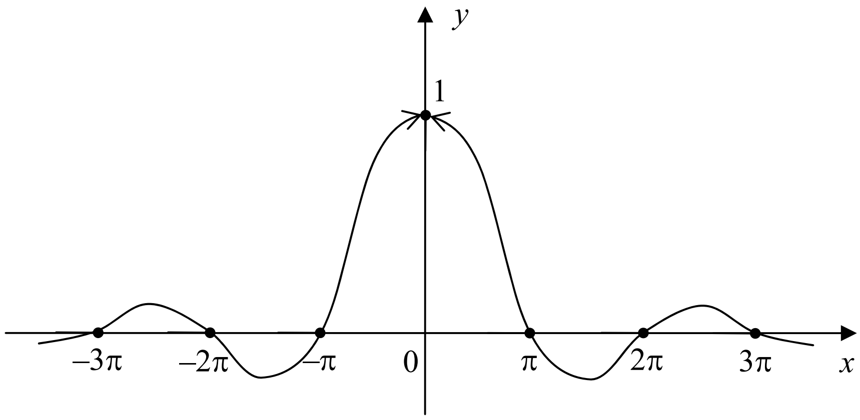


Рис. 1.21. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Пример 2. Найти точки разрыва и определить их тип для функции $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ 5 - x, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$, т. к. на каждом из этих интервалов она задана элементарными функциями (свойство 2). Следовательно, точками разрыва данной функции могут быть только те точки, в которых функция меняет свое аналитическое задание, т. е. точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_1 = 0$:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x+1) = 1,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x^2 - 1) = -1.$$

Так как односторонние пределы существуют и конечны, но не равны между собой, то точка $x_1 = 0$ является точкой конечного разрыва.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x^2 - 1) = 3;$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5 - x) = 3, \ f(2) = (5-x)\big|_{x=2} = 3.$$

Таким образом, имеем $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$. Следовательно, в точке $x_2 = 2$ функция является непрерывной.

График данной функции изображен на рис. 1.22.

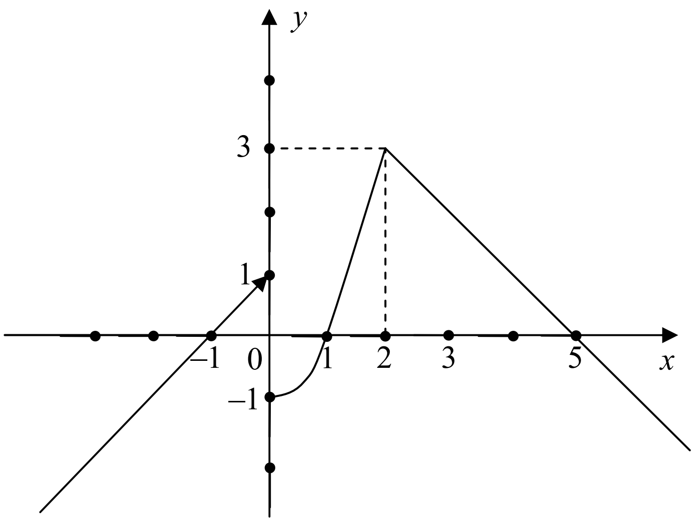


Рис. 1.22. График функции $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ 5 - x, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$

Пример 3. Найти точки разрыва функции и определить их тип:

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \ge -1, \\ \dfrac{x}{x+4}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ на интервалах $(-\infty; -4)$, $(-4; -1)$ и $(-1; +\infty)$ определена и непрерывна, т. к. она задана элементарными функциями (свойство 2).

В точке $x_2 = -4$ функция не определена, значит, точка $x_2 = -4$ является точкой разрыва. Определим ее тип:

$$f(-4-0) = \lim_{x \to -4-0} f(x) = \lim_{x \to -4-0} \frac{x}{x+4} = +\infty;$$

$$f(-4+0) = \lim_{x \to -4+0} \frac{x}{x+4} = -\infty.$$

Следовательно, в точке $x_2 = -4$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_1 = -1$ функция меняет свое аналитическое задание, следовательно, в этой точке возможен разрыв. Найдем односторонние пределы:

$$f(-1-0) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x+4} = -\frac{1}{3};$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (-3x) = 3,\ f(-1) = (-3x)\big|_{x=-1} = 3.$$

Так как $f(-1-0) \neq f(-1+0)$, то точка $x_1 = -1$ является точкой конечного разрыва (рис. 1.23).

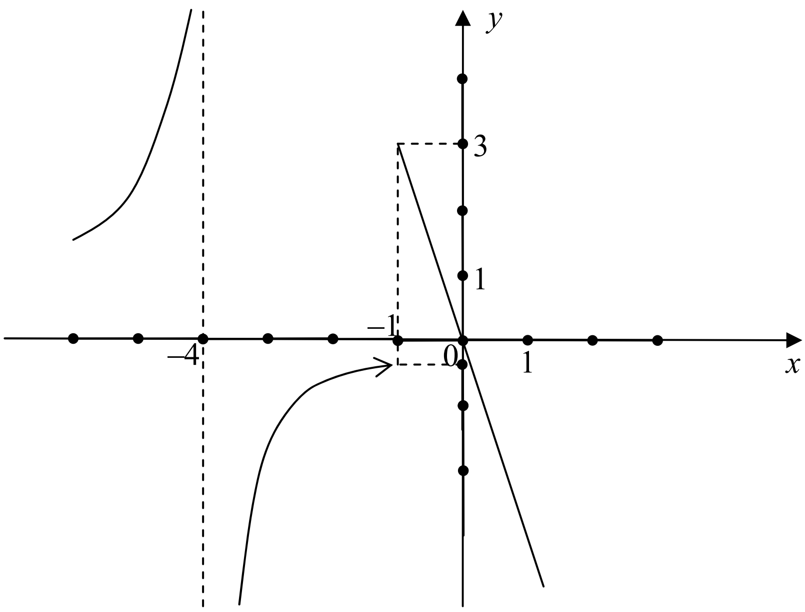


Рис. 1.23. График функции $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \geq -1, \\ \dfrac{x}{x+4}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Точки устранимого и конечного разрывов называют ***точками разрыва I рода***.

Функция, которая на любом конечном интервале имеет конечное число разрывов I рода, называется ***кусочно-непрерывной*** (на этом интервале).

Если хотя бы один из односторонних пределов $f\left(x_0-0\right)$ или $f\left(x_0+0\right)$ не существует (рис. 1.24, точка $x_1=0$) или равен бесконечности, то точки разрыва называют ***точками разрыва II рода***.

Пример. Найти точки разрыва функции и определить их тип: $f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x}$.

Решение. Функция $f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений *x*, за исключением $x=0$. Точка $x=0$ есть точка разрыва II рода, т. к. при $x\to 0$ как справа, так и слева значения функции $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между –1 и +1, не приближаются ни к какому числовому значению. Другими словами, односторонние пределы не существуют.

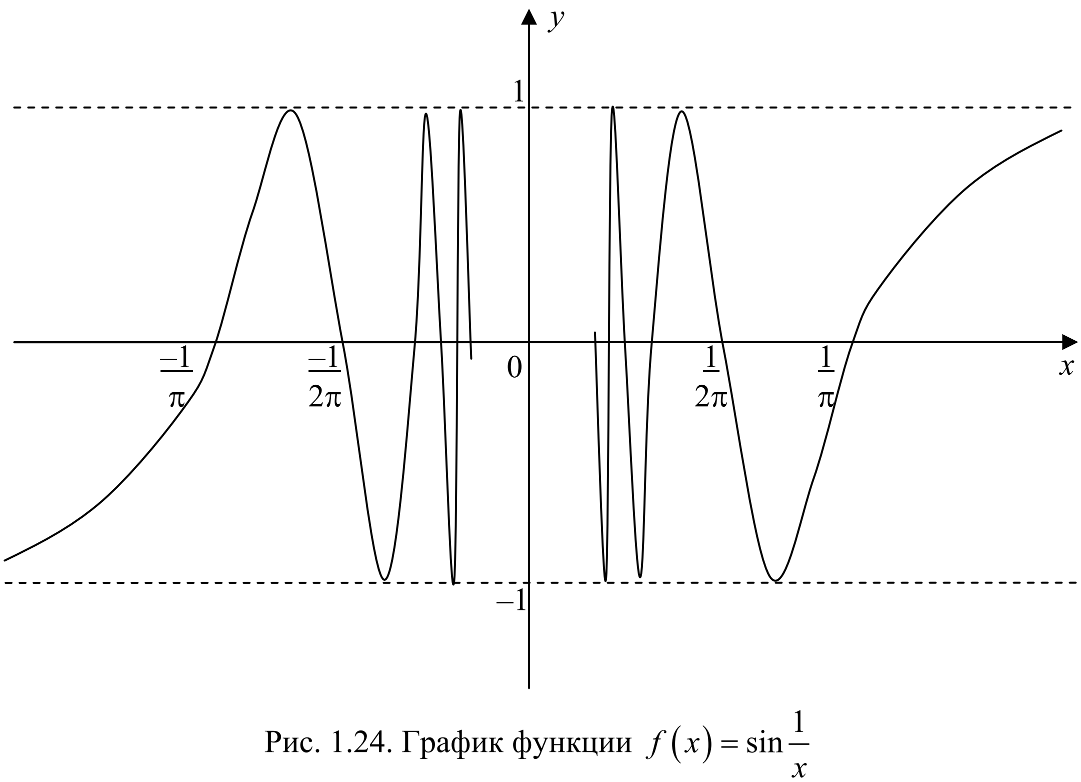


Рис. 1.24. График функции $f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x}$

1.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется приращением функции $y = f\left(x\right)$ в точке x_0?

2. Дать определение непрерывности функции в точке x_0.

3. В чем состоит связь между непрерывностью функции в точке x_0 и ее приращением в данной точке?

4. Дать определение непрерывной функции в точке x_0 слева (справа).

5. Сформулировать критерий непрерывности в точке x_0.

6. Сформулировать свойства функций, непрерывных в точке.

7. Сформулировать свойства функций, непрерывных на отрезке.

8. Какая точка называется точкой разрыва?

9. Какая точка называется точкой: устранимого, конечного, бесконечного разрыва?

10. Какие точки разрывов называют точками разрыва I рода?

11. Какие точки разрывов называют точками разрыва II рода?

1.3.3. Практический минимум

Исследовать на непрерывность в указанных точках следующие функции:

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$; $x_1 = -1,\ x_2 = 3.$

2. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$

3. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-4}$; $x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

4. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$; $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

5. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} - 1$; $x_1 = 2,\ x_2 = 1.$

6. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-4}} - 1$; $x_1 = 5,\ x_2 = 4.$

7. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$; $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

8. $f(x) = \dfrac{x-1}{\left|x-1\right|}$; $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

9. $f(x) = 2^{\frac{1}{x+1}}$; $x_1 = 0,\ x_2 = -1.$

10. $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$; $x_1 = 0,\ x_2 = -1.$

11. $f(x) = \dfrac{3}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$; $x_1 = 2,\ x_2 = 1.$

12. $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$; $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

13. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$; $x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

14. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$; $x_1 = 1, x_2 = 2.$

Найти точки разрыва, определить их тип и сделать схематический чертеж следующих функций:

15. $f(x)=\begin{cases}10-x, & \text{если } x<2,\\ 3, & \text{если } x=2,\\ x^3, & \text{если } x>2.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x<1,\\ 3, & \text{если } x=1,\\ x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & \text{если } x<-3,\\ 5, & \text{если } x=-3,\\ 2-x, & \text{если } x>-3.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & \text{если } x<-3,\\ 7, & \text{если } x=-3,\\ 4-x, & \text{если } x>-3.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x<1,\\ x-2, & \text{если } x=1,\\ 3x^2, & \text{если } x>1.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{если } x<1,\\ -1, & \text{если } x=1,\\ 3x^2, & \text{если } x>1.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{x}, & \text{если } x<4,\\ -1 & \text{если } x=4,\\ \sqrt{x}, & \text{если } x>4.\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если } x\le 0,\\ 0, & \text{если } 0<x\le 2,\\ x-3, & \text{если } x>2.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{если } x\le 0,\\ 1-x, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x>1.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x<-1,\\ 1-x, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ \ln x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x<0,\\ \cos x, & \text{если } 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}3, & \text{если } x<-1,\\ 2-x, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ 3+\ln x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Минимум для аудиторной работы

Исследовать на непрерывность в указанных точках следующие функции: 1; 7; 9; 12.

Найти точки разрыва, определить их тип и сделать схематический чертеж следующих функций: 15; 17; 19; 21.

1.3.4. Ответы

1. $x_1 = -1$ – точка бесконечного разрыва; $x_2 = 3$ – точка непрерывности функции. **2.** $x_1 = 2$ – точка бесконечного разрыва; $x_2 = 3$ – точка непрерывности функции. **3.** $x_1 = -3$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 2$ – точка бесконечного разрыва. **4.** $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка бесконечного разрыва. **5.** $x_1 = 2$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка бесконечного разрыва. **6.** $x_1 = 5$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 4$ – точка бесконечного разрыва. **7.** $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка устранимого разрыва. **8.** $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка конечного разрыва. **9.** $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции; $x_2 = -1$ – точка бесконечного разрыва. **10.** $x_1 = 0$ – точка бесконечного разрыва; $x_2 = -1$ – точка непрерывности функции. **11.** $x_1 = 2$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка конечного разрыва. **12.** $x_1 = -1$ – точка устранимого разрыва; $x_2 = 1$ – точка непрерывности функции. **13.** $x_1 = -2$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 2$ – точка устранимого разрыва. **14.** $x_1 = 1$ – точка устранимого разрыва; $x_2 = 2$ – точка непрерывности функции. **15.** $x = 2$ – точка устранимого разрыва. **16.** $x = 1$ – точка устранимого разрыва. **17.** Функция не имеет точек разрыва. **18.** Функция не имеет точек разрыва. **19.** $x = 1$ – точка конечного разрыва. **20.** $x = 1$ – точка конечного разрыва. **21.** $x_1 = 0$ – точка бесконечного разрыва; $x_2 = 4$ – точка устранимого разрыва. **22.** $x_1 = 0$ – точка конечного разрыва; $x_2 = 2$ – точка конечного разрыва. **23.** $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка бесконечного разрыва. **24.** Функция не имеет точек разрыва. **25.** $x_1 = 0$ – точка конечного разрыва; $x_2 = \pi$ – точка конечного разрыва. **26.** $x_1 = -1$ – точка непрерывности функции; $x_2 = 1$ – точка конечного разрыва.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

2.1.1. Теоретический минимум

1. Определение производной. Дифференцируемость функции.
2. Техника дифференцирования.
3. Производные функций, заданных параметрически.
4. Производные функций, заданных неявно.
5. Логарифмическое дифференцирование.
6. Геометрический и физический смысл производной.
7. Дифференциал функции.
8. Теоремы о дифференцируемых функциях.
9. Правило Лопиталя.

Определение производной. Дифференцируемость функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале $(a;\ b)$. Выберем точку $x_0 \in (a;\ b)$. Выберем другую точку $x = x_0 + \Delta x \in (a;\ b)$. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента***. Найдем соответствующее ***приращение функции*** $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует и конечен:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная $f'(x_0)$ существует, если существуют и равны конечные односторонние производные в точке x_0: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, где $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ – правосторонняя производная, $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ – левосторонняя производная.

Если для некоторого значения x_0 выполняется одно из условий: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то в точке x_0 существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ используют символы: y', $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Схема нахождения производной представлена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Схема нахождения производной функции по определению

Этапы	Пример для функции $f(x) = 2x - 7x^2$
1. Придать фиксированному значению $x_0 \in D(x)$ приращение Δx и вычислить значение функции $f(x_0 + \Delta x)$	$f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x) - 7(x_0 + \Delta x)^2$
2. Найти приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta y = 2(x_0 + \Delta x) - 7(x_0 + \Delta x)^2 -$ $-(2x_0 - 7x_0^2) = \underline{2x_0} + 2\Delta x \underline{\underline{-7x_0^2}} - 14x_0\Delta x -$ $-7(\Delta x)^2 \underline{-2x_0} \underline{\underline{+7x_0^2}} = 2\Delta x - 14x_0\Delta x - 7(\Delta x)^2$
3. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x - 14x_0\Delta x - 7(\Delta x)^2}{\Delta x} =$ $= \dfrac{\Delta x(2 - 14x_0 - 7\Delta x)}{\Delta x} = 2 - 14x_0 - 7\Delta x$
4. Найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2 - 14x_0 - 7\Delta x) = 2 - 14x_0$

Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке, а операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке.

Связь дифференцируемости и непрерывности функции

Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение неверно, т. е. если функция непрерывна в точке, то она может быть не дифференцируемой в этой точке.

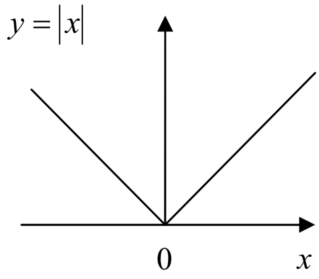
Например, функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

В точке $x = 0$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$



Односторонние пределы не равны между собой, т. к. при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to -0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to +0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, производная в точке $x = 0$ не существует.

Техника дифференцирования

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x; $c = \text{const}$. Тогда:

1. $(c)' = 0$; $(x)' = 1$.	2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$.	4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v = v(x) \neq 0$.

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию вида $y = y(u(x))$, где $y = y(u)$, $u = u(x)$.

Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $y = y(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то функция $y = y(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\boxed{y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0) \text{ или символически } y'_x = y'_u \cdot u'_x.}$$

Производная обратной функции

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна, строго монотонна на интервале $(a; b)$ и в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет конечную и неравную нулю производную. Тогда для обратной функции $x = x(y)$ в соответствующей точке $y_0 = y(x_0)$ также существует производная, равная

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}.}$$

Таблица производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $\alpha = \text{const}$, $u = u(x)$.	2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$.
3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$.	4. $\left(a^u\right)' = a^u(\ln a)u'$.
5. $\left(e^u\right)' = e^u u'$.	6. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$.
7. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$.	8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.	10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.	12. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$.
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$.	14. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$.
	15. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$.

Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ (обозначается $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$):

$$\boxed{f''(x)=\left(f'(x)\right)'.}$$

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n–1)$-го порядка:

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ n=1,\ 2,\ \ldots;\ f^{(0)}=f(x).}$$

Пример 1. Найти производные первого порядка функций:

1) $y=\dfrac{4}{x^2}+\sqrt[5]{7x}-2$; 2) $y=\cos^2 x\cdot\sin x$;

3) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; 4) $y=\sin(\ln 5x)$.

Решение.

1) применим формулу производной суммы:

$$y' = \left(\frac{4}{x^2} + \sqrt[5]{7x} - 2\right)' = \left(\frac{4}{x^2}\right)' + \left(\sqrt[5]{7x}\right)' - (2)' = 4\left(x^{-2}\right)' + \sqrt[5]{7}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' - 0 =$$

$$= 4\cdot(-2)x^{-3} + \sqrt[5]{7}\,\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} = -\frac{8}{x^3} + \frac{\sqrt[5]{7}}{5\sqrt[5]{x^4}} = -\frac{8}{x^3} + \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{7}{x^4}};$$

2) применим формулу производной произведения, затем формулы (1), (8), (10) таблицы производных:

$$y' = \left(\cos^2 x\cdot\sin x\right)' = \left[u = \cos^2 x,\ v = \sin x,\ (uv)' = u'v + uv'\right] =$$

$$= \left(\cos^2 x\right)'\cdot\sin x + \cos^2 x\cdot(\sin x)' = \left[\left(\cos^2 x\right)' = \left(u^2\right)' = 2u\cdot u',\ u = \cos x\right] =$$

$$= 2\cos x\cdot(\cos x)'\cdot\sin x + \cos^2 x\cdot\cos x = 2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x + \cos^3 x =$$

$$= -2\cos x\sin^2 x + \cos^3 x = \cos^3 x - 2\cos x\sin^2 x;$$

3) применим формулу производной частного и формулы (1), (13) таблицы производных:

$$y' = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right)' = \left[u = \operatorname{arctg} x,\ v = 1 + x^2,\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] =$$

$$= \frac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\cdot(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2x\cdot\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^2};$$

4) используем формулы (7), (8) таблицы производных:

$$y' = \left(\sin(\ln 5x)\right)' = \left[(\sin u)' = \cos u\cdot u', u = \ln 5x\right] = \cos(\ln 5x)(\ln 5x)' =$$

$$= \left[(\ln u)' = \frac{1}{u}u', u = 5x\right] = \cos(\ln 5x)\frac{1}{5x}(5x)' = \cos(\ln 5x)\frac{1}{5x}5 = \frac{\cos(\ln 5x)}{x}.$$

Пример 2. Найти производные указанного порядка:

1) $y = xe^x$, $y'''(x)$; 2) $y = \ln(\cos x)$, $y''(x)$.

Решение.

1) $y' = \left(xe^x\right)' = (x)'e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

$$y'' = \left(e^x(x+1)\right)' = \left(e^x\right)'(x+1) + e^x(x+1)' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2),$$

$$y''' = \left(e^x(x+2)\right)' = e^x(x+2) + e^x = e^x(x+3);$$

2) $y' = \left(\ln\left(\cos x\right)\right)' = \dfrac{1}{\cos x}\left(\cos x\right)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$

$y'' = \left(-\operatorname{tg} x\right)' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Производные функций, заданных параметрически

Если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то производные y'_x, y''_{xx} вычисляются по формулам

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\ y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.}$$

Пример. Найти производные y'_x и y''_{xx} функции $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = \left(a\cos^3 t\right)' = 3a\cos^2 t\left(\cos t\right)' = -3a\cos^2 t\sin t.$

$y'_t = \left(a\sin^3 t\right)' = 3a\sin^2 t\cos t.$ Тогда $y'_x = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\dfrac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$

$\left(y'_x\right)'_t = \left(-\operatorname{tg} t\right)' = \dfrac{-1}{\cos^2 t},\ y''_{xx} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$

Производные функций, заданных неявно

Схемы нахождения производных функций, заданных неявно, представлены в табл. 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2

Схема нахождения производной y'_x неявной функции $F(x;y) = 0$

Этапы	Пример для функции $x^4y^2 - 5x + 3y^3 = 7$
1. Продифференцировать обе части равенства $F(x;y) = 0$ по переменной *x*, считая, что $y = y(x)$	$\left(x^4y^2\right)'_x - 5\left(x\right)'_x + 3\left(y^3\right)'_x = \left(7\right)'$; $\left(x^4\right)' y^2 + x^4\left(y^2\right)'_x - 5 + 3\cdot 3y^2y'_x = 0$; $4x^3y^2 + x^4\cdot 2yy'_x - 5 + 9y^2y'_x = 0$
2. Из получившегося в результате дифференцирования равенства выразить y'_x через *x* и *y*	$4x^3y^2 + 2x^4yy'_x - 5 + 9y^2y'_x = 0$; $y'_x\left(2x^4y + 9y^2\right) = 5 - 4x^3y^2$; $y'_x = \dfrac{5 - 4x^3y^2}{2x^4y + 9y^2}$

Таблица 2.3

Схема нахождения производной y''_{xx} неявной функции $F(x;y)=0$

Этапы	Пример для функции $4x^2-y^2=4$
1. Найти y'_x	$8x-2yy'_x=0;$ $y'_x=\dfrac{8x}{2y}=4\dfrac{x}{y}$
2. Найти $y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x$, считая, что $y=y(x)$	$y''_{xx}=4\dfrac{y-xy'}{y^2}$
3. В полученное выражение подставить уже найденное значение y'_x, тем самым выразив y''_{xx} через y и x	$y''_x=4\dfrac{y-x\left(4\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=4\dfrac{y-\dfrac{4x^2}{y}}{y^2}=$ $=4\dfrac{y^2-4x^2}{y^3}=\left[y^2-4x^2=-4\right]=-\dfrac{16}{y^3}.$ Воспользовались условием задачи

Логарифмическое дифференцирование

При дифференцировании степенно-показательных функций $y=u(x)^{v(x)}$, а также функций вида $y=\dfrac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ \dots\ \varphi_n(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\ \dots\ \psi_n(x)}$ и в некоторых других случаях часто бывает эффективным метод логарифмического дифференцирования. Суть метода заключается в том, что функцию сначала логарифмируют, а затем дифференцируют. Схема логарифмического дифференцирования дана в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Схема логарифмического дифференцирования

Схема логарифмического дифференцирования для функции $y=u(x)^{v(x)}$	Пример для функции $y=(\sin x)^{\cos x}$
1. Логарифмируем функцию: $\ln y=\ln u(x)^{v(x)}=v(x)\ln u(x)$	$\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}=\cos x\ln(\sin x)$
2. Дифференцируем: $(\ln y)'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)};$ $\dfrac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$(\ln y)'=-\sin x\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x};$ $\dfrac{y'}{y}=-\sin x\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

Схема логарифмического дифференцирования для функции $y = u(x)^{v(x)}$	Пример для функции $y = (\sin x)^{\cos x}$
3. Выражаем y' из полученного соотношения: $y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$	$y' = \left(-\sin x \ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)\times$ $\times(\sin x)^{\cos x}$

Пример. Найти производную для функции $y = \dfrac{x^4\sqrt[5]{6-x^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{5}(x+7)}}$.

Решение.

1. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^4\sqrt[5]{6-x^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{5}(x+7)}}\right) = \ln\left(x^4\right) + \ln\left(\sqrt[5]{6-x^3}\right) - \ln\left(\sqrt[6]{5}\right) - \ln\sqrt{x+7} =$$

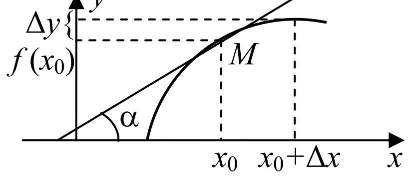
$$= 4\ln x + \frac{1}{5}\ln\left(6-x^3\right) - \frac{1}{6}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln(x+7).$$

2. Дифференцируем: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{-3x^2}{5\left(6-x^3\right)} - \dfrac{1}{2(x+7)}$.

3. Выражаем y': $y' = \left(\dfrac{4}{x} + \dfrac{-3x^2}{5\left(6-x^3\right)} - \dfrac{1}{2(x+7)}\right)\dfrac{x^4\sqrt[5]{6-x^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{5}(x+7)}}$.

Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной

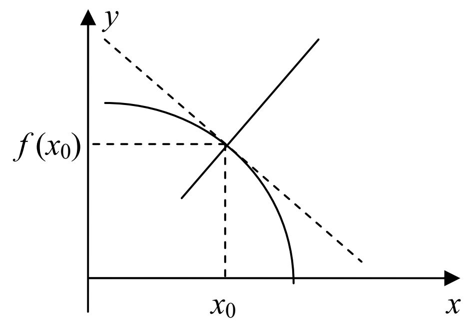
Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$.	

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Замечание. В случае бесконечной производной $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, уравнение касательной имеет вид $x=x_0$, касательная к графику функции параллельна оси *Oy*.

Уравнение нормали к графику функции y = f (x) в точке x_0

Нормалью к графику функции в точке x_0 называется перпендикуляр к касательной в той же точке. Если $f'(x_0)\neq 0$, то уравнение нормали имеет вид: $y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.	

Замечание. Если $f'(x_0)=0$, то касательная параллельна оси *Ox* и уравнение нормали имеет вид $x=x_0$; если $f'(x_0)=\pm\infty$, то уравнение нормали имеет вид $y=f(x_0)$.

Физический смысл производной

Если $S=S(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $S'(t_0)=V(t_0)$ – скорость движения в момент времени t_0. $S''(t_0)=V'(t_0)$ – ускорение – скорость изменения скорости в точке t_0.

Замечание. В общем случае производную функции можно интерпретировать как «скорость» изменения функции.

Пример 1. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\sqrt[3]{x-3}+2$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Решение. Найдем производную функции $y'_x=\dfrac{1}{3}(x-3)^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

Вычислим производную в точке $x_0=4$: $y'_x(4)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(4-3)^2}}=\dfrac{1}{3}$.

Вычислим значение функции в точке $x_0=4$: $y(4)=\sqrt[3]{4-3}+2=3$.

Тогда уравнение касательной $y=3+\dfrac{1}{3}(x-4)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$, уравнение нормали $y=3-3(x-4)\Leftrightarrow y=15-3x$.

Пример 2. В какой точке касательная к графику функции $y=\ln\left(x^2+1\right)$ параллельна прямой $y-x+5=0$?

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой:
$y-x+5=0 \Leftrightarrow y=x-5 \Rightarrow k_{\text{пр}}=1$.

Так как касательная в искомой точке x_0 параллельна данной прямой, то $k_{\text{кас}}\left(x_0\right)=k_{\text{пр}}=1$.

Угловой коэффициент касательной в искомой точке равен $y'\left(x_0\right)$:

$$y'=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1},\quad y'\left(x_0\right)=\frac{2x_0}{x_0^2+1},$$

$$\frac{2x_0}{x_0^2+1}=1 \Leftrightarrow \frac{2x_0}{x_0^2+1}-1=0 \Leftrightarrow -x_0^2+2x_0-1=0 \Leftrightarrow \left(x_0-1\right)^2=0 \Rightarrow x_0=1.$$

Найдем значение функции в точке $x_0=1$: $y(1)=\ln\left(1^2+1\right)=\ln 2$. Таким образом, точка имеет координаты $(1;\ \ln 2)$.

Дифференциал функции

Определение дифференциала

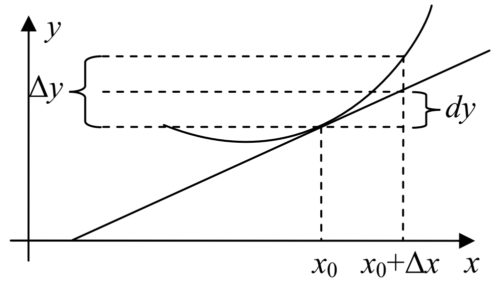
Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$ в этой точке представимо в виде $\Delta y=f'\left(x_0\right)\Delta x+o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке, равная произведению производной функции на приращение аргумента и обозначаемая dy (или $df(x)$): $dy=f'\left(x_0\right)\Delta x$.

Так как дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной: $dx=x'\Delta x=\Delta x$, то

$$\boxed{dy=f'\left(x_0\right)dx.}$$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке x_0, когда аргумент получает приращение Δx.	

Механический смысл дифференциала

Если $S = S(t)$ – закон прямолинейного движения точки, где S – длина пути; t – время, $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$, то $dS(t) = S'(t)dt = V(t)dt$, где $V(t)$ – мгновенная скорость в момент времени *t*. Следовательно, замена приращения $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ дифференциалом $dS(t_0) = S'(t_0)(t - t_0)$ означает замену неравномерного движения равномерным (на бесконечно малом промежутке $[t_0; t_0 + \Delta t]$) с постоянной скоростью $V(t_0) = S'(t_0)$.

Формула для приближенных вычислений

При малых значениях приращения аргумента $\Delta y \approx dy$. Поэтому для приближенных вычислений пользуются формулой

$$\boxed{f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.}$$

Это означает ***линеаризацию*** функции $y = f(x)$, т. е. ее замену линейной по *x* функцией $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, что геометрически соответствует замене участка кривой $y = f(x)$, примыкающего к точке $(x_0; f(x_0))$, отрезком касательной к кривой в этой точке.

Дифференциал сложной функции

$$\boxed{dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx = y'_u du.}$$

Таким образом, формула для дифференциала одна и та же, независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или нет. Это свойство называется ***инвариантностью формы 1-го дифференциала***.

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется дифференциалом второго порядка. Дифференциалом *n*-го порядка называется дифференциал от дифференциала (*n*-1)-го порядка, $n = 2, 3, \ldots$.

Если *x является независимой переменной*, то

$$\boxed{d^2 y = f''(x_0)dx^2,\ d^n y = f^{(n)}(x_0)dx^n.}$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = 5^{\operatorname{tg} x}\sqrt{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой $dy = y'_x dx$:

$$dy = \left(5^{\operatorname{tg} x}\sqrt{x}\right)' dx = \left(\left(5^{\operatorname{tg} x}\right)'\sqrt{x} + 5^{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{x}\right)'\right)dx = \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\left(\operatorname{tg} x\right)'\sqrt{x} +\right.$$

$$\left. +5^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x}}\right)dx = 5^{\operatorname{tg} x}\frac{2x\ln 5 + \cos^2 x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$$

Пример 2. Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x - x^2$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции дифференциалом.

Решение.

$$y(3) = 6 - 9 = -3,\ y(3{,}1) = 6{,}2 - 9{,}61 = -3{,}41 \Rightarrow \Delta y = -3{,}41 - (-3) = -0{,}41;$$

$dy = \left(2x - x^2\right)' dx = (2 - 2x)dx = 2(1 - x)dx$, в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0{,}1$ имеем $dy = 2(1 - 3)0{,}1 = -0{,}4$.

Абсолютная погрешность

$$\varepsilon_{\text{абс}} = |dy - \Delta y| = |-0{,}4 + 0{,}41| = 0{,}01.$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = \left|\frac{-0{,}4 + 0{,}41}{-0{,}41}\right| = \frac{0{,}01}{0{,}41} \approx 0{,}024 = 2{,}4\%.$$

Пример 3. Вычислить приближенно $\cos 29°$.

Решение. Перейдем к радианной мере угла:

$$\cos 29° = \cos\frac{29° \cdot \pi}{180°} = \cos\left(\frac{(30 - 1)\pi}{180}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right).$$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Согласно формуле,

$$\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 + (\cos x)'\Big|_{x_0} \cdot \Delta x, \text{ где } x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = -\frac{\pi}{180}.$$

Следовательно,

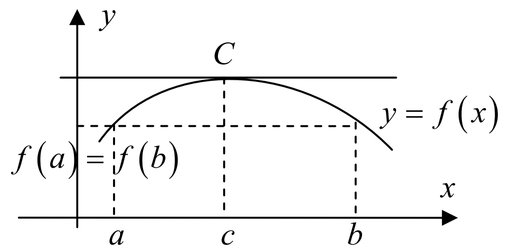
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \cos\frac{\pi}{6} + (\cos x)'\Big|_{\frac{\pi}{6}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180} \approx$$

$$\approx 1{,}73 \cdot 0{,}5 + \frac{0{,}5 \cdot 3{,}14}{180} \approx 0{,}87.$$

Теоремы о дифференцируемых функциях

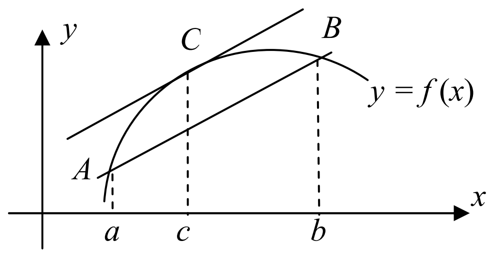
Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

На графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox.	

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;\ b)$ такая, что $f(b) - f(a) =$
$= f'(c)(b-a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

На графике функции найдется хотя бы одна точка $C(c;\ f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.	

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируемы на интервале $(a;\ b)$ и $g'(x) \neq 0$ на интервале $(a;\ b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;\ b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и других, сводящихся к ним.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Пусть $g'(x)\neq 0$ в проколотой окрестности точки a. Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Замечание. Правило справедливо и в случае, когда $x\to\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2-3x+7}$.

Решение. Неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2-3x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x^2-3x+7\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2e^{2x}\right)'}{\left(2x-3\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=+\infty.$$

Неопределенности вида $[\infty\cdot 0]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$ приводятся с помощью тождественных преобразований к неопределенностям $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Решение. В этом пределе неопределенность $[\infty-\infty]$. Воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ и приведем выражение к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin x}.$$

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cos x-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{\cos x}=\left[\frac{1-0}{1}\right]=1.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^3\ln^2 x\right)$.

Решение. В данном пределе неопределенность вида $\left[0\cdot\infty\right]$. Преобразуем ее в неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to+0}x^3\ln^2 x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{\frac{-3}{x^3}}.$$

Опять получили неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применяем правило Лопиталя еще раз: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2\ln x}{\frac{-3}{x^3}}=\dfrac{-2}{3}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=\dfrac{-2}{3}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\dfrac{2}{9}\lim\limits_{x\to+0}x^3=0.$

Неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$ встречаются в степенно-показательных функциях.

Схема вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)^{v(x)}$ приведена в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Схема вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)^{v(x)}$

Этапы	Пример для предела $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\right)^x=\left[0^0\right]$
1. Логарифмируем выражение $f\left(x\right)^{v(x)}$ и находим предел: $\lim\limits_{x\to a}\ln f\left(x\right)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}v\left(x\right)\ln f\left(x\right)=$ $=\left[\infty\cdot0\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln f\left(x\right)}{\frac{1}{v\left(x\right)}}$ или $\lim\limits_{x\to a}\ln f\left(x\right)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{v\left(x\right)}{\frac{1}{\ln f\left(x\right)}}$. Получаем при этом неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\sin x\right)^x=\lim\limits_{x\to0}\left(x\ln\left(\sin x\right)\right)=$ $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\sin x\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Этапы	Пример для предела $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \left[0^0\right]$
2. Применяем правило Лопиталя. Если предел существует и равен K, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{v(x)} = e^K$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(\sin x))'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{-1}{x^2}} =$ $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x\cdot x^2}{\sin x} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2)'}{(\operatorname{tg} x)'} =$ $= -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = -\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos^2 x\right) = 0.$ Так как предел равен 0, то искомый предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$

2.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. В чем заключается метод логарифмического дифференцирования? Когда он применяется?
3. Верно ли утверждение: если функция непрерывна в точке, то она имеет производную в этой точке?
4. Каков геометрический и механический смысл производной?
5. Каков геометрический смысл дифференциала?
6. В чем состоит инвариантность формы 1-го дифференциала?
7. Дифференциал функции в некоторой точке равен нулю при любом приращении аргумента. Что значит это геометрически?
8. Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?
9. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?
10. Если, применяя правило Лопиталя, вы доказали, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то что можно сказать о $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

2.1.3. Практический минимум

Определение производной

Найти производную по определению:

1. $y = 7 + 4x$.
2. $y = \cos 3x$.
3. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.
4. $y = \dfrac{2}{x - 6}$.
5. $y = 8x + 4 - 3x^2$.
6. $y = \sin 2x$.

Техника дифференцирования

Найти производную первого порядка, пользуясь таблицей и правилами дифференцирования:

7. $y = \sin x \cos x.$
8. $y = \dfrac{x \ln x}{e^x} + \ln 5.$
9. $y = \arcsin x \arccos x.$
10. $y = x^{10} 10^x.$
11. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}.$
12. $y = 2^x \log_2 x + \log_2 4.$
13. $y = \dfrac{4x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} + \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}.$
14. $y = \dfrac{x^4 + 6x}{x^5 - 3x^2 + 8}.$
15. $y = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x \sin x.$
16. $y = \cos x \cdot \ln x.$
17. $y = \sqrt[5]{x}\left(4x^3 - 2x^2 + 9\right).$
18. $y = x^{11} \operatorname{tg} x - \sqrt{x^3} - \ln 8.$
19. $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 5x^2\right)\left(\sqrt[3]{x} + 8x\right).$
20. $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 4}.$
21. $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$
22. $y = \dfrac{\sqrt{5x}}{6x^5 + 1}.$
23. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{2 \sin x}.$
24. $y = \sqrt[3]{x^4} \operatorname{arctg} x - x^3 \ln x$.

Найти производную первого порядка, пользуясь таблицей, формулами производной сложной функции и правилами дифференцирования:

25. $y = \sqrt{\sin x}.$
26. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}.$
27. $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^4$.
28. $y = \sqrt{1 + \ln x}.$

29. $y=5^{\frac{x^2}{3}}\cdot x.$

30. $y=\ln^4(\sin x).$

31. $y=x\cdot 10^{\arcsin 2x}.$

32. $y=\sin^2 x\cdot \sin x^2.$

33. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 7x}}.$

34. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2\cos x}.$

35. $y=\operatorname{arctg}^2\ln(3x+4).$

36. $y=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\cdot e^{3x}.$

37. $y=\left(\arcsin 5^x\right)^3.$

38. $y=\dfrac{\sin\sqrt[7]{x}}{\ln(2x)}.$

39. $y=\sqrt{\dfrac{x^3-8}{x+1}}.$

40. $y=\dfrac{\sqrt{5}}{\cos^2\ln(\operatorname{tg}x)}.$

41. $y=\ln\left(\cos\sqrt{2x}\right).$

42. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{e^x}}.$

43. $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}\left(3x^3\right)}.$

44. $y=2^{\frac{3x}{1+x}}.$

45. $y=\dfrac{1}{x}e^{\sin x-x^4+\sqrt{x}+\ln x}.$

46. $y=\dfrac{\sqrt{5}}{1-3^{x^2}}.$

47. $y=\sin^2\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}.$

48. $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}.$

Найти производные указанных порядков:

49. $y=\operatorname{tg}x,\ \ y'''.$

50. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}},\ \ y^{(4)}.$

51. $y=e^{x^2},\ \ y'''.$

52. $y=x^3\ln x,\ \ y'''.$

53. $y=\sin^2\dfrac{x}{2},\ y^{(4)}.$

54. $y=\dfrac{3}{2-3x},\ y^{(4)}.$

55. $y=\arcsin x,\ \ y'''.$

56. $y=\ln\left(x^2-5\right),\ \ y'''.$

Производные функций, заданных параметрически

Найти y'_x:

57. $\begin{cases} x(t)=t\ln t, \\ y(t)=\dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{t}, \\ y(t)=\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t, \\ y(t) = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x(t) = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, \\ y(t) = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos^2 t}{\sin t}, \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

Найти y''_{xx}:

63. $\begin{cases} x(t) = \ln\left(t^2+1\right), \\ y(t) = t^2. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x(t) = at^2, \\ y(t) = bt^3. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y(t) = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x(t) = \arcsin t, \\ y(t) = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Производные функций, заданных неявно

Найти y'_x:

67. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

68. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$.

69. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

70. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$.

71. $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

72. $\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

73. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = xy$.

Найти y''_{xx}:

74. $y = x + \ln y$.

75. $y^3 - y = 6x^2$.

76. $e^y + y + \ln x = 5$.

77. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

78. $5x - 2y^2 - 3xy + x^2 = 0$.

79. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

80. $x^3 + 6x^2y + 2y^3 = 0$.

Логарифмическое дифференцирование

Найти производную первого порядка:

81. $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

82. $y = \left(\cos x\right)^{\ln x}$.

83. $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{\arcsin x}$.

84. $y = \left(x^2-6x\right)^{\frac{1}{x}}$.

85. $y=\sqrt[5]{\dfrac{\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt[3]{2+x}}{6x+x^3}}$.

86. $y=\dfrac{\left(1-x\right)^3\sqrt{\left(7+x\right)^2}}{\left(2+3x\right)e^x}$.

87. $y=\left(\cos x\right)^x$.

88. $y=\left(x+2\right)^{(\ln x)}$.

89. $y=\left(2x-x^3\right)\sqrt{\left(e^{\cos x}-3x\right)}\cdot\sqrt[3]{\left(7+x\right)}$.

Геометрический и физический смысл производной

Найти уравнения касательной и нормали для следующих кривых в точке с абсциссой x_0:

90. $y=x-\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$.

91. $y=2-x-x^2$, $x_0=2$.

92. $y=x\ln x$, $x_0=e$.

93. $y=\sqrt{x^3+3x^2}$, $x_0=1$.

94. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$.

95. $y=2x^3-7x^2+8$, $x_0=2$.

96. $y=\sin 3x-5$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

97. $y=\dfrac{x^2}{x^3-4}$, $x_0=2$.

98. При каких значениях независимой переменной касательные к кривым $y=x^2$ и $y=x^3$ параллельны?

99. В каких точках касательная к кривой $y=2x^3-5$ параллельна прямой $4y-6x+6=0$?

Найти, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые:

100. $y=x^2-4x+4$ и $y=6x-x^2-4$.

101. $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.

102. Свободно падающее тело движется по закону $s=\dfrac{gt^2}{2}$ (g = 9,8 м/с^2). Найти:

а) среднюю скорость движения тела за промежуток времени от t = 5 с до ($t+\Delta t$) с, где Δt = 1 с; 0,05 с; 0,01 с;

б) скорость тела в конце 5-й секунды.

103. Точка движется по закону $s\left(t\right)=2t^3-t^2+1$. В какой момент времени она остановится?

104. Показать, что если тело движется по закону $s=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

Дифференциал функции

Найти приращение и дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 при $\Delta x = 0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции дифференциалом:

105. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

106. $y = 4x - 2x^3$, $x_0 = 1$.

107. $y = \dfrac{x-1}{2+x^2}$, $x_0 = 2$.

Найти дифференциал функции:

108. $y = e^{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x$.

109. $y = \sin^2 \sqrt{x}$.

110. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^3}$.

111. $y = 4^{x^2} \ln x$.

112. $2y^2 - 4y - 3x^2 + 6x = 0$.

113. $y = \ln^3\left(7x^2 - 8x\right)$.

114. $y = (\ln x)^{\left(3x^4 - 2x\right)}$.

115. $\begin{cases} x(t) = 4t^3, \\ y(t) = \ln\left(t^2 + 4\right). \end{cases}$

Вычислить приближенно:

116. $y = \sqrt[5]{\dfrac{2-0{,}15}{2+0{,}15}}$.

117. $y = \lg 11$.

118. $y = \sqrt[5]{33}$.

119. $y = \sin 151°$.

Правило Лопиталя

Найти пределы:

120. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

121. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

122. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\dfrac{5}{x}\right)$.

123. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

124. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$.

125. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

126. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

127. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

128. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x^2}{\ln \cos 3x}$.

129. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \sin 2x}{2e^x - \sqrt{4 - x^2}}$.

130. $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

131. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Минимум для аудиторной работы

Определение производной: 1; 2.

Техника дифференцирования: 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 49; 50; 51; 52.

Производные функций, заданных параметрически: 57; 58; 63; 64.

Производные функций, заданных неявно: 67; 68; 69; 74; 75; 76.

Логарифмическое дифференцирование: 81; 82; 83; 85.

Геометрический и физический смысл производной: 90; 92; 93; 98; 100; 102.

Дифференциал функции: 105; 108; 109; 111.

Правило Лопиталя: 116; 117; 118; 120; 121; 122.

2.1.4. Ответы

1. 4. **2.** $-3\sin 3x$. **3.** $\dfrac{-2x}{\left(x^2+3\right)^2}$. **7.** $\cos 2x$. **8.** $\dfrac{1+(1-x)\ln x}{e^x}$.

9. $\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **10.** $x^9\cdot 10^x\left(10+x\ln 10\right)$. **11.** $\dfrac{\pi}{2\left(1+x^2\right)\operatorname{arcctg}^2 x}$.

Указание: $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2}$. **12.** $2^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$. **13.** $5\sqrt[4]{x}+\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

14. $\dfrac{-5x^8-30x^5+24x^3+36x^2+48}{\left(x^5-3x^2+8\right)^2}$. **15.** $x^2\sin x$. **25.** $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. **26.** $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.

27. $4\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}$. **28.** $\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. **29.** $5^{\frac{x^2}{3}}\left(\dfrac{2x^2\ln 5}{3}+1\right)$.

30. $4\operatorname{ctg} x\ln^3\sin x$. **31.** $10^{\arcsin 2x}\left(1+\dfrac{2x\ln 10}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$. **32.** $\sin 2x\sin x^2+2x\sin^2 x\cos x^2$.

33. $\dfrac{-14}{3\sqrt[3]{\sin^5 7x\cos 7x}}$. **34.** $\dfrac{\sin x\left(\cos^2 x+1\right)}{2\cos^2 x}$. **35.** $\dfrac{6\operatorname{arctg}(3x+4)}{\left(1+\ln^2(3x+4)\right)(3x+4)}$.

49. $\dfrac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$. **50.** $\dfrac{105}{8\sqrt{x^9}}$. **51.** $e^{x^2}\left(12x+8x^3\right)$. **52.** $6\ln x+11$.

53. $-\dfrac{1}{2}\cos x$. **57.** $\dfrac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}$. **58.** $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **59.** $\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$. **63.** t^2+1.

64. $\frac{3b}{4a^2t}$. **67.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **68.** $-\frac{e^{x+y}\sin y+\sin x}{e^{x+y}\cos y+\cos x}$. **69.** $\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$.

70. $\frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}$. **74.** $\frac{-y}{(y-1)^3}$. **75.** $12\frac{(3y^2-1)^2-72x^2y}{(3y^2-1)^3}$. **76.** $\frac{e^{2y}+e^y+1}{x^2(e^y+1)^3}$.

77. $\frac{-2(1+y^2)}{y^5}$. **81.** $x^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)$. **82.** $(\cos x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\cos x}{x}-\operatorname{tg}x\ln x\right)$.

83. $\frac{1}{4}x^{\frac{\arcsin x}{4}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$. **84.** $(x^2-6x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x-6}{x^2(x-6)}-\frac{\ln(x^2-6x)}{x^2}\right)$.

85. $\sqrt[5]{\frac{(x^2-4)\sqrt[3]{2+x}}{6x+x^3}}\left(\frac{2x}{5(x^2-4)}+\frac{1}{15(2+x)}-\frac{6+3x^2}{5x(6+x^2)}\right)$. **90.** Уравнение касательной $2x-y-2=0$; уравнение нормали $x+2y-1=0$. **91.** Уравнение касательной $5x+y-6=0$; уравнение нормали $x-5y-22=0$. **92.** Уравнение касательной $2x-y-e=0$; уравнение нормали $x+2y-3e=0$. **93.** Уравнение касательной $4y-9x+1=0$; уравнение нормали $4x+9y-22=0$. **98.** $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$. **99.** $\left(\frac{1}{2};-4\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-5\frac{1}{4}\right)$. Указание: если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны: $k_1=k_2$. **100.** $(1;1)$, $(4;4)$, $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{6}{7}$. Указание: угол пересечения кривых – это угол между касательными, проведенными к кривым в точке их пересечения, $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$.

102. а) $v_{ср}=53{,}9$; 49,245; 49,049 м/с; б) $v=49$ м/с. **105.** $\Delta y\approx-0{,}006$; $dy\approx-0{,}007$; $\varepsilon_{абс}\approx0{,}001$; $\varepsilon_{отн}\approx0{,}143$. **106.** $\Delta y=-0{,}262$; $dy=-0{,}2$; $\varepsilon_{абс}=0{,}062$; $\varepsilon_{отн}\approx0{,}237$.

108. $dy=\left(\frac{1-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$. **109.** $dy=\frac{\sin2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$. **110.** $dy=\frac{1}{2}x^{\frac{x^3}{2}+2}(3\ln x+1)dx$.

111. $dy=4^{x^2}\left(2x\ln4\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$. **116.** 0,97. **117.** 1,043. **120.** $\frac{3}{5}$. **121.** 1. **122.** 5. **123.** 1. **124.** –2. **125.** 0.

2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

2.2.1. Теоретический минимум

1. Возрастание и убывание функции.
2. Максимум и минимум функции.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
4. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.
5. Асимптоты графика функции.
6. Общая схема исследования функции и построения графика.

Возрастание и убывание функции

Одним из приложений производных является применение их к исследованию функции и построению схемы графика функции.

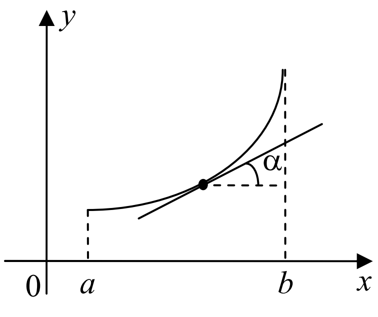
Условия возрастания и убывания функции

Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ ***не убывала (не возрастала)*** на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее ***производная*** была во всех точках интервала ***неотрицательной***, т. е. $f'(x)\geq 0$ (***неположительной***, т. е. $f'(x)\leq 0$).

Если во всех точках интервала $(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

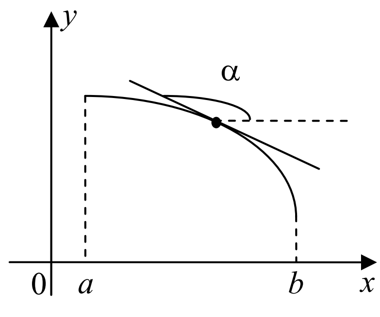
Функция $y=f(x)$ постоянна на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ в каждой точке этого интервала.

$y'>0$ $\qquad$ $y'=\mathrm{tg}\alpha$ $\qquad$ $y'<0$



$0°<\alpha<90°$

Возрастающая функция



$90°<\alpha<180°$

Убывающая функция

Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными*** (иногда строго монотонными для возрастающих и убывающих).

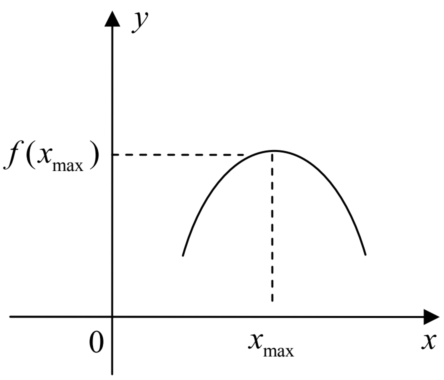
Максимум и минимум функции

Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума)***, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geq f(x_0)$).

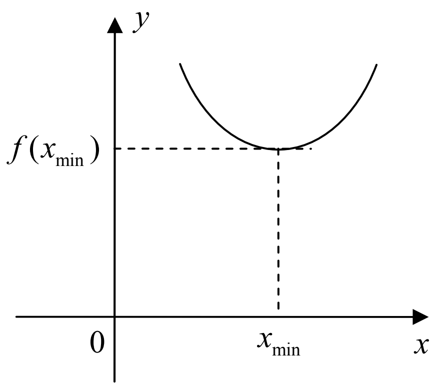
Если в окрестности точки x_0 для всех точек $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется ***точкой строгого локального максимума (минимума)***.

Точки локального максимума и минимума называются ***точками локального экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами*** функции.

В точках экстремума и только в них для достаточно малых Δx приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через рассматриваемую точку x_0: $\Delta y \geq 0$ в случае минимума и $\Delta y \leq 0$ в случае максимума.



Точка строгого максимума



Точка строгого минимума

Функция может иметь локальный экстремум лишь во внутренних точках области определения. Слово «локальный» часто опускают.

Необходимое условие экстремума

> Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки области определения функции $y = f(x)$, в которых ее производная равна нулю (стационарные точки) или не существует, называются ***критическими точками*** (точками, подозрительными на экстремум) функции. Функция может иметь ***экстремум лишь в критических точках***.

Первый достаточный признак экстремума

> Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности, за исключением, может быть, самой точки x_0. Тогда если при переходе слева направо через точку x_0 ***производная меняет знак*** с «–» на «+», то x_0 является точкой строгого ***минимума***; если знак меняется с «+» на «–», то точка x_0 является точкой строгого ***максимума***.

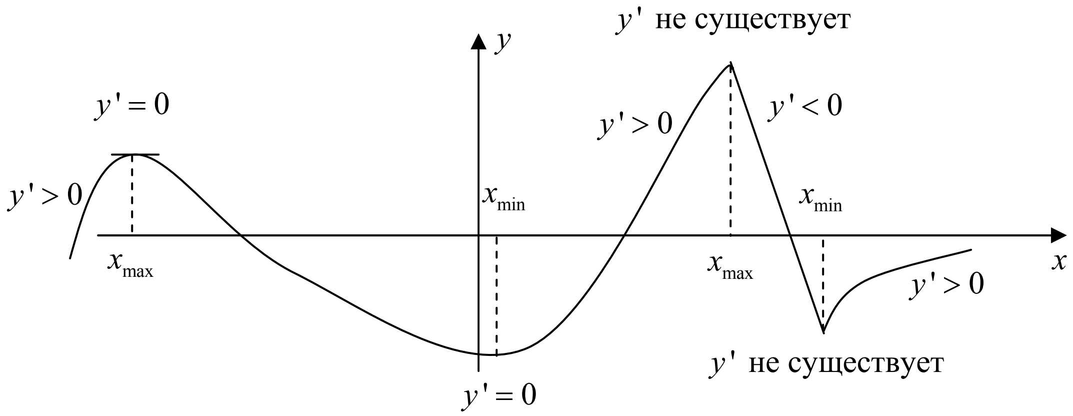
Производная в точке меняет знак с «–» на «+» (с «+» на «–»), если в некоторой левосторонней (правосторонней) окрестности этой точки производная отрицательная, а в правосторонней (левосторонней) окрестности – положительная.

Второй достаточный признак экстремума

> Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 равную нулю первую производную и непрерывную отличную от нуля вторую производную. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка строгого ***максимума***; если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого ***минимума***.

Например, для $y = x^2$ и $x_0 = 0$ имеем $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$, значит, $x_0 = 0$ – точка строгого локального минимума; для $y = -x^2$ и $x_0 = 0$ имеем $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$, значит, $x_0 = 0$ – точка строгого локального максимума.

Примеры точек экстремумов



Примеры критических точек, не являющихся точками экстремума

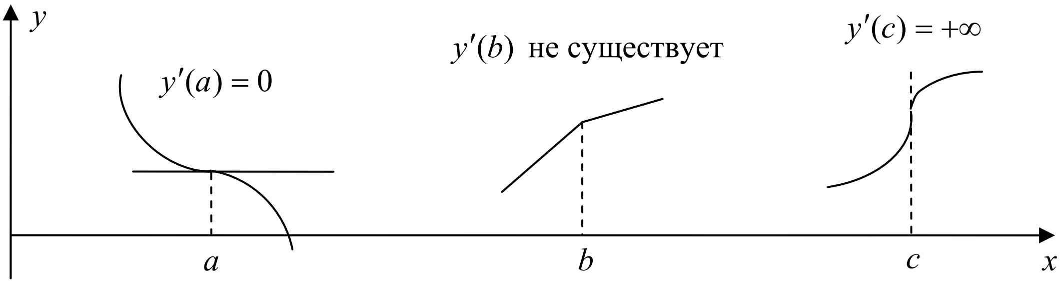


Схема исследования функции на экстремум с помощью первой производной

Исследование на экстремум включает следующие этапы:

1) находим область определения функции $y = f(x)$ и интервалы непрерывности;

2) находим первую производную $f'(x)$;

3) находим критические точки (производная равна нулю или не существует) и наносим их вместе с точками разрыва на числовую прямую. Эти точки разбивают область определения на интервалы, в которых производная сохраняет знак;

4) определяем знак производной в каждом из полученных интервалов (для этого достаточно определить знак в какой-нибудь точке интервала); если производная больше нуля, то это интервал строгого возрастания функции, если же производная меньше нуля – интервал строгого убывания;

5) устанавливаем, как меняется знак производной в окрестности каждой критической точки: если при переходе слева направо через точку x_0 ***производная меняет знак*** с «–» на «+», то x_0 является точкой строгого ***минимума***; если знак меняется с «+» на «–», то точка x_0 является точкой строгого ***максимума***;

6) вычисляем значения функции (***экстремумы***) в точках максимума и минимума и строим эскиз графика функции в окрестности каждой критической точки.

Схема исследования на экстремум с помощью второй производной

В основу положен второй достаточный признак экстремума:

1) находим первую производную $f'(x)$ и точки, в которых она равна нулю (стационарные точки);

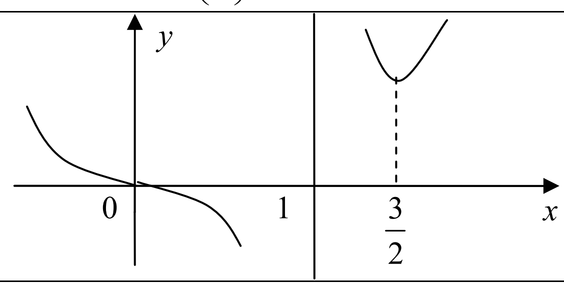
2) находим вторую производную $f''(x)$ и определяем ее знак в каждой стационарной точке x_0. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого ***максимума***, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого ***минимума***.

В случае $f''(x_0) = 0$ можно воспользоваться первой схемой.

Пример исследования функции на монотонность и экстремумы приведен в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Пример исследования функции на монотонность и экстремумы

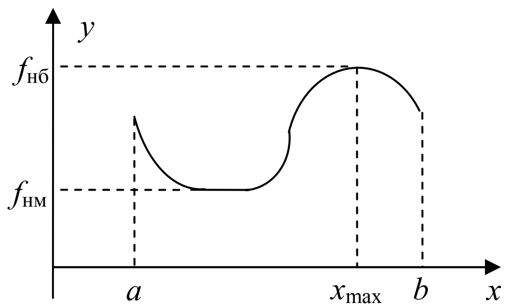
Этапы	Функция $y = \dfrac{x^3}{x-1}$
1. Находим область определения и интервалы непрерывности	Область определения: $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. Функция непрерывна при всех $x \neq 1$, $x = 1$ – точка разрыва
2. Находим производную $y'(x)$	$y'(x) = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$
3. Находим критические точки функции (производная равна нулю или не существует)	1) $y'(x) = 0$, $x^2(2x-3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$; 2) $y'(x)$ не существует при $x = 1$, но $x = 1$ не принадлежит области определения и не является критической точкой; $y(0) = 0$
4. Определяем знак $y'(x)$ в интервалах, на которые критические точки и точки разрыва разбивают область определения	Знак $y'(x)$: $-$ $-$ $-$ min $+$; Поведение функции: $\searrow$ 0 $\searrow$ 1 $\searrow$ $\dfrac{3}{2}$ $\nearrow$
5. Записываем интервалы возрастания и убывания, находим экстремумы функции	На интервалах $(-\infty;\ 1)$ и $\left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)$ функция убывает, на интервале $\left(\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$ функция возрастает; $x_2 = \dfrac{3}{2}$ – точка минимума, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{27}{4}$; $y(0) = 0$
6. Строим эскиз графика функции в окрестности каждой критической точки	

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Точки наибольшего и наименьшего значений функции на некотором множестве X, в частности на отрезке, называются точками ***глобального***, или абсолютного, ***экстремума*** этой функции на этом множестве.

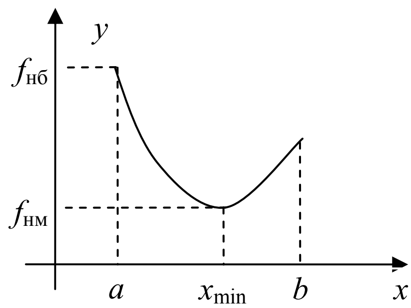
Функция, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Например:



$$\min_{[a;\,b]} f(x) = f_{нм}$$

$$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max}) = f_{нб}$$



$$\min_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\min}) = f_{нм}$$

$$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(a) = f_{нб}$$

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;\ b]$

1. Находим критические точки функции $y = f(x)$, принадлежащие интервалу $(a;\ b)$.

2. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка.

3. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример нахождения наибольшего и наименьшего значений функции приведен в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Пример нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

Этапы	Функция $y = \dfrac{x^3}{x-1}$, $x \in \left[-2;\ \dfrac{1}{2}\right]$.
1. Находим и приравниваем к нулю производную $y'(x)$	$y'(x) = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $x^2(2x-3) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{3}{2}$

Окончание табл. 2.7

Этапы	Функция $y=\dfrac{x^3}{x-1},\ x\in\left[-2;\dfrac{1}{2}\right].$
2. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$	Интервалу $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ принадлежит только точка $x_1=0$
3. Вычисляем значения функции в критической точке и на концах отрезка	$y(0)=0,\ y(-2)=\dfrac{8}{3},\ y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$
4. Из найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее	$y_{\text{нб}}=y(-2)=\dfrac{8}{3},\ y_{\text{нм}}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4},$ $y_{\text{нб}}$ – наибольшее значение, $y_{\text{нм}}$ – наименьшее значение функции на отрезке

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

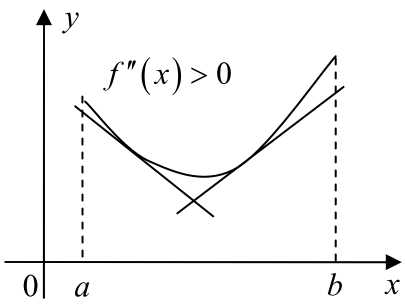
Функция $y=f(x)$ называется ***выпуклой (вогнутой)*** на интервале $(a;\ b)$, если любая дуга ее графика (отвечающего этому интервалу) расположена не выше (не ниже) стягивающей дугу хорды. Так, функция $y=x^2$ выпукла, а $y=-x^2$ вогнута на всей числовой оси.

Дифференцируемая функция выпукла (вогнута) на интервале, если ее график расположен не ниже (не выше) любой касательной к нему. Иногда для выпуклой (вогнутой) функции используется термин выпуклая вниз, вогнутая вверх (выпуклая вверх, вогнутая вниз).

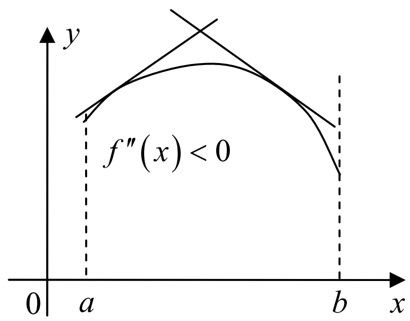
Точки непрерывности функции, в которых меняется выпуклость на вогнутость или наоборот, называются ***точками перегиба функции***. Если x_0 – точка перегиба функции $y=f(x)$, то точка $(x_0;f(x_0))$ называется ***точкой перегиба графика*** этой функции. В окрестности точки перегиба график дифференцируемой функции лежит по разные стороны касательной к графику в точке перегиба.

Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции

Если вторая производная $f''(x)\geq 0$ ($f''(x)\leq 0$) во всех точках интервала $(a;\ b)$, то функция $y=f(x)$ выпукла (вогнута) на этом интервале. Если эти неравенства строгие, то и выпуклость (вогнутость) будет строгая.



Функция выпукла (строго)



Функция вогнута (строго)

Достаточные условия существования точек перегиба

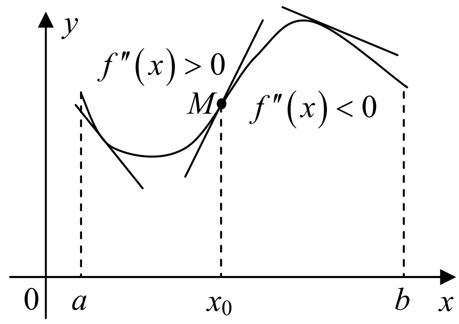
Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак и функция непрерывна в точке x_0, то точка x_0 – точка перегиба функции, а точка $M\ \left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ – точка перегиба графика функции.	

Схема исследования функции на выпуклость и отыскания точек перегиба

Схема следует из достаточных условий:

1) находим область определения функции $y = f(x)$;

2) находим вторую производную $f''(x)$ функции и точки из области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует, отмечаем их на числовой прямой. Они разбивают область определения на интервалы, в которых $f''(x)$ сохраняет знак;

3) определяем знак второй производной в каждом интервале (для этого достаточно определить знак в какой-либо точке каждого интервала). Если в рассматриваемом интервале $f''(x) < 0$, то в этом интервале функция вогнута, если $f''(x) > 0$, то функция выпукла;

4) среди точек, в которых функция непрерывна, а вторая производная равна нулю или не существует, определяем те, при переходе через которые вторая производная меняет знак. Эти точки являются точками перегиба.

Пример исследования на выпуклость и точки перегиба представлен в табл. 2.8

Таблица 2.8

Пример исследования на выпуклость и точки перегиба

Этапы	Функция $y = x^4 - 6x^2$
1. Находим область определения, промежутки непрерывности функции	Функция определена, непрерывна и дифференцируема для всех $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Находим производную второго порядка и точки, в которых она равна нулю или не существует	$y' = 4x^3 - 12x$; $y'' = 12x^2 - 12 = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$
3–4. В каждом интервале, на которые точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ разбивают область определения, определяем знак $y''(x)$ и находим промежутки выпуклости и вогнутости функции	Знак $y''(x)$: $+$ $-$ $+$ Характер функции: $\cup$ -1 $\cap$ 1 $\cup$ перегиб перегиб Функция: а) выпукла при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) вогнута при $x \in (-1;\ +1)$; в) точки перегиба функции $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$; г) точки перегиба графика функции $(-1;\ -5)$ и $(1;\ -5)$

Асимптоты графика функции

Под ***асимптотой кривой*** понимают прямую, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают асимптоты вертикальные (параллельные оси Oy), горизонтальные (параллельные оси Ox) и наклонные.

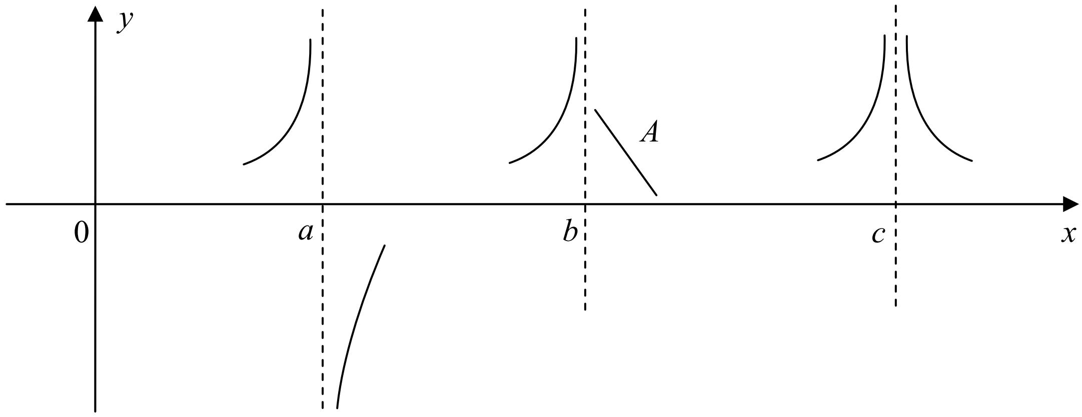
Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ равен плюс (или минус) бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty(-\infty)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty(-\infty)$.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\big(f(x) - kx - b\big) = 0$, что равносильно существованию конечных пределов $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\big(f(x) - kx\big)$.

Запись $x \to \pm\infty$ означает, что при нахождении наклонных асимптот нужно отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Если пределы различные, то график функции имеет более одной наклонной асимптоты.

Если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ − уравнение ***горизонтальной асимптоты***, т. е. горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной.

Примеры возможного расположения графика относительно вертикальной асимптоты



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to c-0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to b+0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to c+0} f(x) = +\infty$$

Прямые $x = a$ и $x = c$ − двусторонние вертикальные асимптоты, прямая $x = b$ − левосторонняя асимптота.

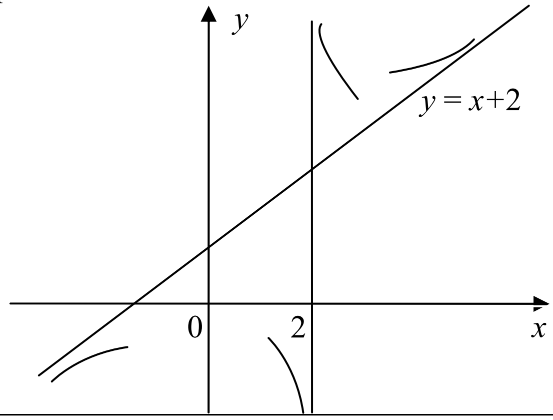
Пример нахождения асимптот графика функции дан в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Пример нахождения асимптот графика функции

Этапы	Функция $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$
1. Находим область определения и интервалы непрерывности функции	Функция определена и непрерывна при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, $x = 2$ − точка разрыва
2. Определяем тип точки разрыва, вычисляя односторонние пределы. Если точка бесконечного разрыва, то существует вертикальная асимптота	$\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left(\dfrac{5}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left(\dfrac{5}{+0}\right) = +\infty$; $x = 2$ − точка бесконечного разрыва; прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота

Окончание табл. 2.9

Этапы	Функция $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$
3. Находим наклонные $y=kx+b$ асимптоты графика функции. Строим эскиз графика функции в окрестности асимптот. *Замечание*. Расположение графика относительно наклонной асимптоты можно определить, сравнивая значения ординаты для асимптоты и функции при одних и тех же значениях абсциссы (достаточно больших): $\dfrac{x^2+1}{x-2}=\dfrac{\left(x^2-4\right)+5}{x-2}=$ $=\left(x+2\right)+\dfrac{5}{x-2}>x+2$ при $x>2$. Значит, график функции лежит выше асимптоты. При $x<2$ график функции лежит ниже асимптоты	$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{\left(x-2\right)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=1;$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}-x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=2;$ прямая $y=x+2$ − наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ 

Общая схема исследования функции и построения графика

Процесс исследования функции $y=f\left(x\right)$ и построения графика можно условно разбить на следующие этапы:

1) предварительное исследование зависимости $y=f\left(x\right)$;

2) исследование по первой производной;

3) исследование по второй производной;

4) построение схемы графика с учетом полученных результатов.

Целесообразно результаты исследования сопровождать последовательным построением схемы графика.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

На 1-м этапе необходимо:

а) найти область определения функции и интервалы непрерывности;

б) если есть точки разрыва, найти односторонние пределы функции в этих точках и изобразить на чертеже поведение функции вблизи каждой точки разрыва;

в) исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;

г) найти асимптоты графика функции;

д) изучить поведение функции при стремлении аргумента к граничным точкам области определения (если это не ясно из предыдущих исследований);

е) найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат и отметить их на схеме графика.

На 2-м этапе необходимо:

а) найти первую производную $f'(x)$;

б) найти критические точки ($f'(x) = 0$ или не существует);

в) найти интервалы возрастания ($f'(x) > 0$) и убывания ($f'(x) < 0$);

г) найти точки максимума и минимума, вычислить значения функции в этих точках; изобразить на чертеже поведение функции в окрестности каждой из этих точек.

На 3-м этапе необходимо:

а) найти вторую производную $f''(x)$;

б) найти промежутки вогнутости ($f''(x) < 0$) и выпуклости ($f''(x) > 0$);

в) найти точки перегиба ($f''(x) = 0$ или не существует, но в окрестности точки меняет знак), вычислить значения функции в этих точках и изобразить поведение функции в окрестности этих точек на чертеже.

4-й этап предполагает построение схемы графика с использованием полученных данных.

Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. При решении конкретной задачи отдельные этапы этой схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или невыполнимыми, поэтому порядок пунктов схемы исследования может быть несколько нарушен. Так, в более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например пункты а), е) первого этапа и пункт г) второго этапа. Если же график функции не совсем ясен и после выполнения всех этапов исследования, то можно построить дополнительно несколько точек графика, выяснить другие особенности функции.

Примеры исследования функции и построения графиков представлены в табл. 2.10 и 2.11.

Таблица 2.10

Пример исследования функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$
и построения графика

Этапы	Функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$
1. а) найдем область определения и интервалы непрерывности функции	Так как функция является многочленом, то она определена и непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Точек разрыва нет
в) исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность	Область определения симметрична относительно начала координат и $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, $f(x+T) \neq f(x)$, $\forall x \in D_f$, $T > 0$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической
г) найдем асимптоты графика функции	Так как нет точек разрыва, то нет и вертикальных асимптот. Наклонные асимптоты отсутствуют в силу того, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
д) найдем пределы функции при стремлении аргумента к границам области определения ($x \to \pm\infty$)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 3\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 3\right) = -\infty$
е) найдем точки пересечения с осями координат (какие возможно)	Точка $(0; 3)$ − точка пересечения с осью *Oy* (при $x = 0$ $y = 3$). Положение точки пересечения с осью *Ox* определится дальше
2. а)–г) найдем интервалы возрастания и убывания, точки экстремума	$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$ при $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; Знак $y'(x)$: $+$ (max) 1 $-$ (min) 3 $+$ Поведение функции: $\nearrow$ 1 $\searrow$ 3 $\nearrow$ x $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ – интервалы возрастания; $(1;\ 3)$ – интервал убывания функции; $x = 1$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума, $y(1) = 7$, $y(3) = 3$
3. а)–в) найдем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба	$y'' = 6x - 12 = 0$ при $x = 2$, $y(2) = 5$; $y''(x) < 0$ при $x < 2$ (функция вогнута) и $y''(x) > 0$ при $x > 2$ (функция выпукла), значит, $x = 2$ – точка перегиба функции, а точка (2; 5) – точка перегиба графика функции

Окончание табл. 2.10

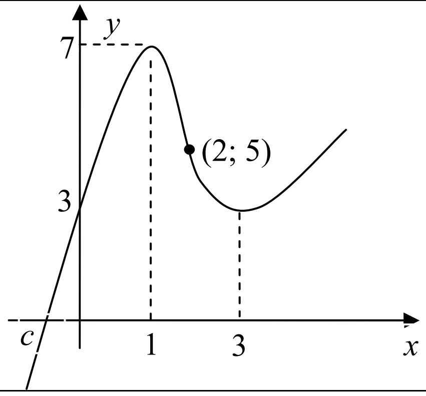
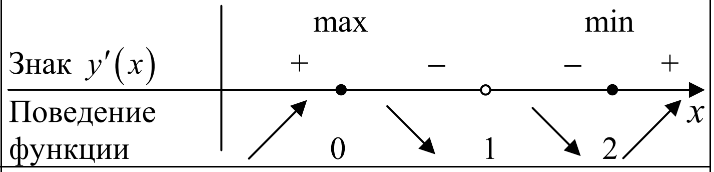
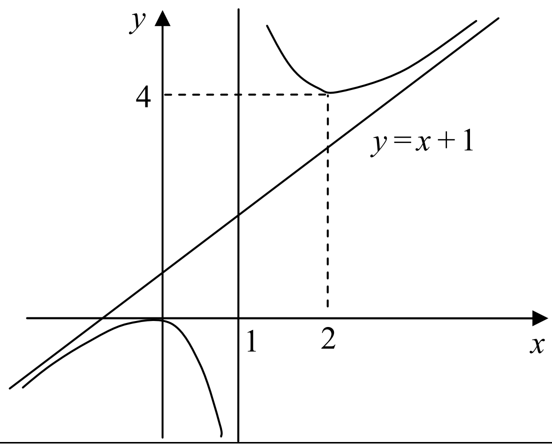
Этапы	Функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$
4. Построим схематический график функции. *Замечание.* График функции пересекает ось Ox в одной точке $x = c$, принадлежащей интервалу $(-1;\ 0)$. Значит, уравнение $x^3 - 6x^2 + 9x + 3 = 0$ имеет один действительный корень $x = c$	

Таблица 2.11

Пример исследования функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ и построения графика

Этапы	Функция $y = \dfrac{x^2}{x-1}$
1. а) найдем область определения и интервалы непрерывности функции	Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 1$ (как частное двух непрерывных функций); $x = 1$ – точка разрыва
б) исследуем тип точки разрыва $x = 1$. Для этого найдем односторонние пределы при $x \to 1$	$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = \left(\dfrac{1}{+0}\right) = +\infty.$ Так как в точке $x = 1$ функция терпит бесконечный разрыв, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой
г) найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$. *Замечание.* Отличие степени многочлена в числителе от степени многочлена в знаменателе на единицу свидетельствует о наличии наклонной асимптоты	$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1,$ $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1.$ Прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так как $\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(x^2-1)+1}{x-1} = (x+1) + \dfrac{1}{x-1} > x + 1$ при $x > 1$, то график функции расположен выше асимптоты, аналогично ниже асимптоты при $x < 1$
в), е) исследуем функцию на четность, найдем точки пересечения с осями	Так как область определения не симметрична относительно нуля, то функция не будет ни четной, ни нечетной. При $x = 0$ $y = 0$, значит, график функции пройдет через начало координат

Окончание табл. 2.11

Этапы	Функция $y = \frac{x^2}{x-1}$
2. а)–г) исследуем функцию на экстремум	$y' = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $y'=0$, $x^2-2x=0$ при $x_1=0$, $x_2=2$. Эти точки являются критическими. Исследуем знак производной в окрестности каждой критической точки; $y(0)=0$, $y(2)=4$. 
3. а)–в) найдем интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба	$y'' = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$, значит, точек перегиба нет; при $x>1$ функция выпукла $(y''>0)$ и при $x<1$ – вогнута $(y''<0)$
4. Используя данные исследования, построим схему графика функции. *Замечание.* Отдельные этапы исследования иногда можно не проводить. В данном случае точки перегиба можно было не находить, т. к. поведение графика определялось предыдущими пунктами исследования	

2.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется областью определения функции?

2. Как называется прямая $x=a$, если:
а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$?

3. Как найти вертикальные асимптоты графика функции?

4. Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. Чему равен предел этой функции при $x\to+\infty$? Дать геометрическую иллюстрацию.

5. Как найти наклонные асимптоты графика функции?

6. Дайте определение точки локального минимума функции.

7. Что можно сказать о приращении функции в достаточно малой окрестности точки локального максимума?

8. Что можно сказать о производной дифференцируемой функции в точке экстремума? В окрестности точки экстремума?

9. Какие точки называются критическими?

10. Опишите схему исследования функции на экстремум.

11. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$ и $f'(x) > 0$. Что можно сказать о поведении функции на интервале?

12. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;\ b)$ и имеет производную в каждой точке интервала. Что можно сказать о производной функции на $(a; b)$?

13. Как найти интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности) функции?

14. Будет ли точка $x = 0$ критической для функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$?

15. Какая функция называется выпуклой (вогнутой)?

16. Что можно сказать о второй производной дважды дифференцируемой выпуклой на интервале $(a;\ b)$ функции?

17. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?

18. Какая точка называется точкой перегиба графика функции?

19. Чему равна вторая производная функции в точке перегиба?

20. Что можно сказать о второй производной функции в окрестности точки перегиба?

21. Что можно сказать о касательной в точке перегиба графика функции?

22. Опишите схему нахождения точек перегиба.

2.2.3. Практический минимум

Найти экстремумы функции:

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.
2. $y = (x-1)e^{3x}$.
3. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.
4. $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$
5. $y = (x+2)^2(x-3)^3$.
6. $y = \sqrt{x}\ln x$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

7. $y = x^3 - 6x^2 + 9,\ x \in [-1; 2]$.

8. $y = x - 2\sqrt{x},\ x \in [0; 5]$.

9. $y = x + \dfrac{1}{x},\ x \in [1; 2]$.

10. $y = x - \ln x,\ x \in [1; e]$.

11. $y = \sin x + \cos x,\ x \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

12. $y = (x+1)e^x,\ x \in [-3; -1]$.

13. $y = 3x^4 + 4x^3 + 9,\ x \in [-2; 1]$.

14. $y = \sqrt{25 - x^2},\ x \in [-3; 4]$.

Исследовать функцию и построить ее схематический график:

15. $y = x^3 + x$.

16. $y = x^4 - 4x - 2$.

17. $y = (x+2)^2(x-1)^2$.

18. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

19. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

20. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

21. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

22. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$.

23. $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

24. $y = x^2 e^{-x}$.

25. $y = xe^{-2x}$.

26. $y = \ln(4x - x^2)$.

27. $y = (x-3)x^2$.

28. $y = 8x^3 - x^4$.

29. $y = (x-1)(2x+3)^2$.

30. $y = \dfrac{1}{(x+2)(x-4)}$.

31. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

32. $y = \dfrac{3x - 2}{x^2}$.

33. $y = x \ln x$.

34. $y = x - \ln(x+1)$.

35. $y = \dfrac{1}{x}\ln^2 x$.

36. $y = x^2 e^{-2x}$.

37. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

38. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

Минимум для аудиторной работы

Найти экстремумы функции: 1; 2; 3.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке: 10; 11; 14.

Исследовать функцию и построить схематический график: 18; 23; 31; 34; 38.

2.2.4. Ответы

1. $y_{\max} = y(2) = 14, \quad y_{\min} = y(3) = 13$. **2.** $y_{\min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{e^2}{3}$.
3. $y_{\min} = y(1) = 0, \ y_{\max} = y\left(e^2\right) = 4e^{-2}$. **7.** $y_{\text{нб}} = y(0) = 9, \ y_{\text{нм}} = y(2) = -7$.
8. $y_{\text{нб}} = y(5) = 5 - 2\sqrt{5}, \ y_{\text{нм}} = y(1) = -1$. **9.** $y_{\text{нб}} = y(2) = 2{,}5, \ y_{\text{нм}} = y(1) = 2$.
10. $y_{\text{нб}} = y(e) = e - 1, \ y_{\text{нм}} = y(1) = 1$.

15. Функция определена и непрерывна при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Функция нечетная, т. к. $y(-x) = -y(x)$, и график симметричен относительно начала координат. Асимптот нет. Точек экстремума нет, т. к. производная $y' = 3x^2 + 1 > 0$. Вторая производная $y'' = 6x$ обращается в нуль при $x = 0$ $(y = 0)$ и при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс. Значит, точка $x = 0$ является точкой перегиба. При переходе через точку функция меняет вогнутость на выпуклость.

16. Функция определена и непрерывна при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Асимптот нет. В точке $(0;\ -2)$ график пересекает ось *Oy*. Точка $x = 1$ − точка минимума, $y(1) = -5$. Точек перегиба нет (вторая производная больше нуля). Функция всюду выпукла.

17. Функция определена и непрерывна при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Точки экстремума: $x = -2$ и $x = 1$ − точки минимума, $x = -\frac{1}{2}$ − точка максимума, $y_{\min} = y(-2) = 0, \ y_{\min} = y(1) = 0, \ y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}$. График функции пересекает ось *Ox* в точках $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$. Асимптот нет.

18. Функция определена, непрерывна и принимает неотрицательные значения (корень арифметический) на отрезке $[0;\ 2]$. На концах отрезка значения функции равны нулю. Точки экстремума: $y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} = 0$, $x = 1$ − точка максимума, $y(1) = 1$. Точек перегиба нет (вторая производная отрицательная). Функция всюду вогнута.

19. Область определения функции описывается неравенством $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат, $y(0)=0$. Прямые $x=1$ и $x=-1$ − вертикальные асимптоты: график функции приближается к асимптоте $x=1$ только слева, а к асимптоте $x=-1$ только справа. Точек экстремума нет. Точка перегиба $x = 0$. При переходе через точку перегиба функция меняет вогнутость на выпуклость.

20. Функция определена, непрерывна и принимает положительные значения при всех $x \neq 0$. Функция четная, и график симметричен относительно оси *Oy*. Кривая имеет две асимптоты: вертикальная – ось *Oy*, горизонтальная − $y=1$. К горизонтальной асимптоте график приближается сверху при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Точек экстремума нет. Функция возрастает при $x<0$ и убывает при $x>0$. Точек перегиба нет. Функция всюду выпукла.

21. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq \pm 2$. Прямые $x=2$ и $x=-2$ − вертикальные асимптоты. Функция нечетная, т. к. $y(-x)=-y(x)$; $y(0)=0$. Ось *Ox* – горизонтальная асимптота. Точка перегиба $x = 0$. При переходе через точку перегиба функция меняет выпуклость на вогнутость.

22. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 1$. Прямая $x=1$ − вертикальная асимптота: при $x<1$ график приближается к асимптоте слева, при $x>1$ − справа. Ось *Ox* – горизонтальная асимптота: при $x \to -\infty$ график приближается к асимптоте снизу, при $x \to +\infty$ – сверху. Экстремумы: точка максимума $x=0$, $y(0)=0$; точка минимума $x=-2$, $y(-2)=-\dfrac{4}{27}$. Точки перегиба функции $x_{1,2}=-2 \pm \sqrt{3}$.

23. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 1$. Прямая $x=1$ − вертикальная асимптота. При $x<1$ график приближается к асимптоте слева, при $x>1$ – справа. Точка минимума $x=\dfrac{3}{2}$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$. Точка перегиба $x = 0$. При переходе через точку перегиба функция меняет выпуклость на вогнутость.

24. Функция определена, непрерывна и принимает неотрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$; $y(0)=0$. Ось *Ox* – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$. К асимптоте график приближается сверху. Экстремумы: точка минимума $x=0$, $y(0)=0$; точка максимума $x=2$, $y(2)=\frac{4}{e^2}$. Точки перегиба функции $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$. При переходе через точку x_1 функция меняет выпуклость на вогнутость, при переходе через точку x_2 – вогнутость на выпуклость.

25. Функция определена и непрерывна при всех $x\in\mathbb{R}$; $y(0)=0$, $y<0$ при $x<0$ и $y>0$ при $x>0$. Ось Ox – горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. К асимптоте график приближается сверху. Точка максимума $x=\frac{1}{2}$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-1}$. Точка перегиба функции $x = 1$. При переходе через точку перегиба функция меняет вогнутость на выпуклость.

26. Область определения: $4x-x^2>0\Leftrightarrow x(4-x)>0\Leftrightarrow x\in(0;\,4)$. Прямые $x=0$ и $x=4$ − вертикальные асимптоты: к асимптоте $x=0$ график приближается справа, а к асимптоте $x=4$ − слева. В точках $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$ график пересекает ось Ox. Точка $x=2$ − точка максимума, $y(2)=\ln 4$. Точек перегиба нет. Функция всюду вогнута.

33. $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=\left[(+0)(-\infty)\right]=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0$ (по правилу Лопиталя).

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln((x+1)\right)=\left[\infty-\infty\right]=+\infty$.

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-2x}\right)=\left[(+\infty)e^{-\infty}\right]=\left[(+\infty)\,0\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0$ **(**по правилу Лопиталя).

38. Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x\neq 0$. Ось Oy − вертикальная асимптота при $x\to-0$ ($y\to+\infty$). Прямая $y=1$ − горизонтальная асимптота: график функции приближается к асимптоте снизу при $x\to+\infty$ и сверху при $x\to-\infty$. Точек экстремума нет. Точка перегиба функции $x=\frac{1}{2}$. При переходе через точку перегиба функция меняет выпуклость на вогнутость.

Глава 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

1. Первообразная, ее общий вид и существование, определение неопределенного интеграла.
2. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица простейших интегралов.
3. Непосредственное интегрирование.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Метод рационализации: интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических.
8. Метод рационализации: интегрирование простейших иррациональностей.

Первообразная, ее общий вид и существование, определение неопределенного интеграла

Первообразная функция

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$, если

$$\boxed{F'(x) = f(x),\, x \in (a;\, b).}$$

Пример 1. Первообразной для функции $f(x) = 2x^3$ на всей числовой оси является $F(x) = \frac{1}{2}x^4$, т. к. $\left(\frac{1}{2}x^4\right)' = 2x^3$. Первообразной является и функция вида $\frac{1}{2}x^4 + C$, где C – произвольная, но фиксированная постоянная.

Пример 2. Первообразной для функции $f(x) = 1\big/\left(1 + x^2\right)$ на промежутке $(-\infty;\, +\infty)$ является произвольная функция вида $F(x) = \operatorname{arctg} x + C$, где $C = \mathrm{const}$, т. к. $(\operatorname{arctg} x + C)' = 1\big/\left(1 + x^2\right)$. Отметим, что первообразной является и функция вида $-\operatorname{arcctg} x + C_1$, где $C_1 = \mathrm{const}$.

Таким образом, первообразных у данной функции бесчисленное множество, т. к. постоянная величина C может принимать любые значения.

Общий вид первообразных

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то выражение

$$\boxed{F(x)+C,}$$

где $C = \text{const}$ – произвольная постоянная, описывает общий вид (любую первообразную) для функции $f(x)$ на $(a; b)$.

Таким образом, две различные первообразные для одной и той же функции на одном и том же промежутке различаются разве лишь на постоянную.

Существование первообразной

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на данном интервале, то на этом интервале она имеет первообразную.

Неопределенный интеграл

Общий вид первообразных для данной функции $y = f(x)$ (на интервале $(a; b)$) будем называть ***неопределенным интегралом*** от этой функции (на интервале $(a; b)$) и обозначать $\int f(x)dx$.

Таким образом,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C,\, x \in (a;\ b),}$$

где $F(x)$ – произвольная (фиксированная) первообразная для $f(x)$; C – произвольная постоянная.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется ***интегрированием*** этой функции, сама функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***. Интегрирование – операция (с точностью до постоянной), обратная операции дифференцирования. Правильность интегрирования всегда можно проверить дифференцированием (см. ниже свойства 1 и 2).

Найти неопределенный интеграл от функции – это значит найти общий вид первообразных от нее; если неопределенный интеграл для данной функции существует, то такая функция называется ***интегрируемой*** (на данном интервале).

График первообразной $y = F(x)$ от функции $f(x)$ называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x)$.

Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица простейших интегралов

1. Дифференцирование обратно интегрированию:

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.}$$

Производная и дифференциал неопределенного интеграла равны соответственно подынтегральной функции и подынтегральному выражению.

2. Интегрирование (с точностью до постоянной) обратно дифференцированию:

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C, \int dF(x) = F(x) + C.}$$

Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной; интеграл от дифференциала $dF(x)$ дает $F(x) + C$.

Отметим, что символы интеграла $\int$ и дифференциала d, применяемые последовательно, взаимно уничтожают друг друга (без учета произвольной постоянной).

3. Важнейшим свойством неопределенного интеграла является его линейность:

а) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, где $\alpha = \text{const}$;	Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.
б) $\int (f(x) \pm g(x))dx =$ $= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;	Неопределенный интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов этих функций.

Эти два свойства неопределенного интеграла можно заменить им эквивалентным:

в) $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx =$ $= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$, где $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.	Неопределенный интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от этих функций.

4. Свойство ***инвариантности*** формул интегрирования.

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при замене независимой переменной любой дифференцируемой функцией от нее, т. е.

$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$, где $u = u(x)$ – любая непрерывно дифференцируемая функция от x, в частности $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $a \neq 0$.

Это свойство вытекает из свойства инвариантности первого дифференциала и может быть проверено по правилу дифференцирования сложной функции. Оно эффективно при практическом применении, т. к. основная таблица интегралов в силу этого оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от нее.

Таблица простейших интегралов $(u = u(x))$

1. $\int 0 \cdot du = C.$	
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1.$	2. а) $\int 1 \cdot du = u + C;$ 2. б) $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$ 2. в) $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C.$
3. $\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C.$	
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$	4. а) $\int e^u du = e^u + C.$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$	
6. $\int \cos u du = \sin u + C.$	
7. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C.$	
8. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C.$	

9. $\int \frac{1}{u^2+a^2}du = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a}+C_1. \end{cases}$	9. a) $\int \frac{1}{1+u^2}du = \operatorname{arctg}u + C =$ $= -\operatorname{arcctg}u + C_1$.
10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \begin{cases} \arcsin\frac{u}{a}+C, \\ -\arccos\frac{u}{a}+C. \end{cases}$	10. a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin u + C =$ $= -\arccos u + C_1$.
11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C;$ $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + C.$	11. a) $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{u-1}{u+1}\right\| + C;$ $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+u}{1-u}\right\| + C.$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\| + C.$	

Пример. Найти неопределенный интеграл с помощью таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{5x^2+1} = \int \frac{dx}{5\left(x^2+\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{5}x + C\,.$$

Интегрирование, в отличие от дифференцирования с его установленными формальными правилами, в большей степени требует индивидуального подхода.

Непосредственное интегрирование

Нахождение интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегрального выражения с использованием основных свойств и таблицы неопределенных интегралов называется ***непосредственным интегрированием***.

Если функции $f_1(x),\ \ldots, f_n(x)$ интегрируемы в некотором промежутке, то функция $f(x) = f_1(x) \pm\ \ldots\ \pm f_n(x)$ также интегрируема в том же промежутке, причем

$$\int \left(f_1(x) \pm\ \ldots\ \pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx \pm\ \ldots\ \pm \int f_n(x)\,dx.$$

Если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя, то интеграл равен логарифму абсолютной величины знаменателя:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|f(x)\right| + C.}$$

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x^7 + x^5 - 1}{x^5}dx$; 2) $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$; 3) $\int \frac{7^x + 1}{3^x}dx$;

4) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Решение. Данные интегралы сводятся к табличным путем тождественного преобразования подынтегрального выражения:

1) разделим числитель на знаменатель почленно и воспользуемся свойством линейности:

$$\int \frac{x^7 + x^5 - 1}{x^5}dx = \int \frac{x^7}{x^5}dx + \int dx - \int x^{-5}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^{-4}}{4} + C;$$

$$2)\ \int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{\left(x^2+4\right)-4}{x^2+4}dx = \int\left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)dx = x - 2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C;$$

$$3)\ \int \frac{7^x+1}{3^x}dx = \int\left(\frac{7}{3}\right)^x dx + \int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^x}{\ln\frac{7}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{7^x}{3^x\left(\ln 7 - \ln 3\right)} - \frac{1}{3^x \ln 3} + C;$$

$$4)\ \int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int\left[\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right) - 1\right]dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}x - x + C;$$

$$5)\ \int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{\left(x+3\right)^2 + 4} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C;$$

$$6)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)+C.$$

Произвольная постоянная записывается при этом не каждый раз при нахождении интеграла от суммы, а лишь один раз, когда исчезает знак последнего интеграла в сумме.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл $\int g(u)du$, метод интегрирования которого известен, с последующим возращением к исходной переменной.

Существуют две разновидности замены переменной в неопределенном интеграле: вынесение (и внесение) множителя из-под знака (под знак) дифференциала.

Теорема (интегрирование подстановкой – вынесение множителя из-под знака дифференциала). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале *X*, а функция $x=\varphi(t)$ (со множеством значений *X*) непрерывно дифференцируема на интервале *T* и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t=\psi(x)$ для $x\in X$. Пусть далее $G(t)$ – первообразная для функции $g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на *T*. Тогда $f(x)$ интегрируема на *X*, причем $\int f(x)dx=G(\psi(x))+C$.

Теорема (внесение множителя под знак дифференциала). Пусть функция $x=\varphi(t)$ со множеством значений *X* имеет непрерывную производную на интервале *T*, а функция $y=f(x)$ непрерывна и имеет первообразную $F(x)$ на *X*. Тогда функция $g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на *T*, причем

$$\int g(t)dt=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$$

Этот тип замены переменной, по существу, повторяет свойство инвариантности формул интегрирования.

Обе разновидности замены переменной ($x=\varphi(t)$, $\varphi(t)=x$) удобно проиллюстрировать на следующей схеме:

$$\overbrace{\int f(x)\,dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ t=\psi(x)\end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}^{\text{интегрирование подстановкой (вынесение множителя)}} = \int g(t)\,dt =$$

$$= G(t) + C = G(\psi(x)) + C.$$

$$\overbrace{\int g(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\underbrace{\varphi'(t)\,dt}\underset{\varphi(t)=x}{=}\int f(x)\,dx}^{\text{внесение множителя}} =$$

$$= F(x) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Предыдущие преобразования называются формулами замены переменной в неопределенном интеграле.

Формулы наиболее часто встречающихся дифференциалов

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}d(ax)$.	2. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b)$.
3. $\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = d(\ln(ax)) =$ $= \frac{1}{a}d(a\ln x + b)$.	4. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}) = \frac{2}{a}d(a\sqrt{x}+b)$.
5. $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$.	6. $e^x dx = d(e^x) = \frac{1}{a}d(ae^x + b)$.
7. $\cos x dx = d(\sin x) =$ $= \frac{1}{a}d(a\sin x + b)$.	8. $\sin x dx = -d(\cos x) =$ $= -\frac{1}{a}d(a\cos x + b)$.
9. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}x)$.	10. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}x)$.
11. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}x) =$ $= -d(\mathrm{arcctg}x)$.	12. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) =$ $= -d(\arccos x)$.

Пример. Найти интегралы методом замены переменной:

1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; 3) $\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln x}}$;

4) $\int\frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(7+\sqrt[3]{x}\right)}$; 6) $\int\sqrt{16-x^2}dx$.

Решение.

$$1)\ \int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}\underset{\boxed{xdx=\frac{1}{2}dx^2}}{=}\int\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{4-x^2}+C;$$

$$2)\ \int e^{\sin x}\cos x dx\underset{\boxed{\cos xdx=d\sin x}}{=}\int e^{\sin x}d\left(\sin x\right)=e^{\sin x}+C;$$

$$3)\ \int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln x}}\underset{\boxed{\frac{dx}{x}=d(\ln x)}}{=}\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x\sqrt{\ln x}}=\int\left(\ln x\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(\ln x\right)=\frac{-2}{\sqrt{\ln x}}+C;$$

$$4)\ \int\frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\mathrm{tg}^2 x+4\right)}\underset{\boxed{\frac{dx}{\cos^2 x}=d\mathrm{tg}x}}{=}\int\frac{d\mathrm{tg}x}{\left(\mathrm{tg}^2 x+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{2}+C;$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(7+\sqrt[3]{x}\right)}=\left|\begin{array}{l}x=t^6,\ t=\sqrt[6]{x}\\ dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}\left(7+\sqrt[3]{t^6}\right)}=6\int\frac{t^5dt}{t^3\left(7+t^2\right)}=$$

$$=6\int\frac{t^2dt}{7+t^2}=6\int\frac{\left(t^2+7\right)-7}{7+t^2}dt=6\int\left(\frac{t^2+7}{t^2+7}-\frac{7}{7+t^2}\right)dt=6\left(\int dt-7\int\frac{dt}{\left(\sqrt{7}\right)^2+t^2}\right)=$$

$$=6\left(t-\frac{7}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}\right)+C=6\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt{7}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}}\right)+C;$$

$$6)\ \int\sqrt{16-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=4\sin t\\ dx=4\cos tdt\\ t=\arcsin\frac{x}{4}\end{array}\right|=\int\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos tdt=$$

$$=4\int\sqrt{16\left(1-\sin^2 t\right)}\cos tdt=16\int\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=16\int\cos^2 tdt=$$

$$=16\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt=8\left(\int dt+\int\cos 2tdt\right)=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$=8\left(\arcsin\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)\right)+C$, откуда, используя формулу $\sin(2\arcsin a)=2\sin(\arcsin a)\cos(\arcsin a)=2a\sqrt{1-a^2}$, при $a=\frac{x}{4}$ получаем окончательный ответ:

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=8\left(\arcsin\frac{x}{4}+\frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\right)+C=8\left(\arcsin\frac{x}{4}+\frac{x}{16}\sqrt{16-x^2}\right)+C.$$

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Метод интегрирования по частям основывается на формуле дифференцирования произведения двух функций.

Теорема. Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда интегралы $\int v(x)u'(x)dx$ и $\int u(x)v'(x)dx$ существуют на X и

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx. \qquad (3.1)$$

Так как $u'(x)dx=du, v'(x)dx=dv$, то (3.1) можно записать в виде

$$\boxed{\int u\,dv=u\,v-\int v\,du.} \qquad (3.2)$$

Это равенство называется ***формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле***.

Практическое применение интегрирования по частям заключается в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется некоторым образом в виде произведения двух множителей u и dv (последний обязательно содержит dx) и заменяется двумя интегрированиями: 1) при отыскании v из выражения dv; 2) при нахождении интеграла от $v\,du$.

Метод интегрирования по частям удобно применять для вычисления интегралов следующих стандартных типов:

1) $\int P_n(x)e^{mx}dx, \int P_n(x)a^{mx}dx, \int P_n(x)\cos(mx)dx, \int P_n(x)\sin(mx)dx,$ где $m\in R$, $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x (в качестве u берем многочлен $u=P_n(x)$);

2) $\int P_n(x)\ln(mx)dx$, $\int P_n(x)\arccos(mx)dx$, $\int P_n(x)\arcsin(mx)dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(mx)dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(mx)dx$ (здесь $dv = P_n(x)dx$);

3) $\int e^{mx}\cos(\alpha x)dx$, $\int e^{mx}\sin(\alpha x)dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ (дважды интегрируем по частям, полагая $u = e^{mx}$; повторное интегрирование по частям приводит к линейному уравнению, содержащему исходный интеграл, решая которое, находим интеграл).

Иногда для получения результата нужно последовательно несколько раз применить интегрирование по частям.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int (2x+5)\cos\frac{x}{3}dx$; 2) $\int x^2e^{-5x}dx$; 3) $\int \operatorname{arctg}3xdx$.

Решение.

$$1)\ \int (2x+5)\cos\frac{x}{3}dx = \begin{vmatrix} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = \cos\frac{x}{3}dx & v = \int\cos\frac{x}{3}dx = 3\sin\frac{x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= 3(2x+5)\sin\frac{x}{3} - \int 3\sin\frac{x}{3}2dx = 3(2x+5)\sin\frac{x}{3} - 6\int\sin\frac{x}{3}dx =$$

$$= 3(2x+5)\sin\frac{x}{3} + 18\cos\frac{x}{3} + C;$$

$$2)\ \int x^2e^{-5x}dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-5x}dx, & v = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2\frac{1}{5}e^{-5x} + \int\frac{1}{5}e^{-5x}2xdx = -\frac{1}{5}x^2e^{-5x} + \frac{2}{5}\int xe^{-5x}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-5x}dx, & v = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}x^2e^{-5x} +$$

$$+ \frac{2}{5}\left(-x\frac{1}{5}e^{-5x} + \int\frac{1}{5}e^{-5x}dx\right) = -\frac{1}{5}x^2e^{-5x} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}xe^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x}\right) + C =$$

$$= -\frac{e^{-5x}}{125}\left(25x^2 + 10x + 2\right) + C;$$

3) $\int \operatorname{arctg}3x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}3x, & du = \dfrac{3dx}{1+9x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x\operatorname{arctg}3x - \int \dfrac{3x\,dx}{1+9x^2} =$

$= x\operatorname{arctg}3x - \dfrac{1}{6}\int \dfrac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} = x\operatorname{arctg}3x - \dfrac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right| + C$.

Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или дробно-рациональной функцией, или рациональной дробью) называется выражение вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней соответственно n и m относительно переменной x. Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется ***правильной***, если $n < m$. В противном случае ($n \geq m$) дробь называется ***неправильной***.

Простейшие рациональные дроби классифицируются по следующим четырем типам:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k = 2, 3, \ldots)$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\left(p^2 - 4q < 0\right)$; IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $(k = 2, 3, \ldots)$,

где A, B, a, p, q – действительные числа; кроме того, по отношению к дробям вида III и IV предполагается, что трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, так что $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Рациональные дроби I и II типов интегрируются непосредственно с помощью основных правил и таблицы интегралов:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

Интеграл от простейшей дроби III типа вычисляется приведением знаменателя к сумме квадратов:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

и последующей заменой $x+\dfrac{p}{2}=t$ переменной x:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{matrix}x+\dfrac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{At+B-\dfrac{Ap}{2}}{t^2+\dfrac{4q-p^2}{4}}dt=A\int\frac{t}{t^2+\dfrac{4q-p^2}{4}}dt+$$

$$+\int\frac{\left(B-\dfrac{Ap}{2}\right)dt}{t^2+\dfrac{4q-p^2}{4}}=\frac{A}{2}\ln\left|t^2+\frac{4q-p^2}{4}\right|+\frac{B-\dfrac{Ap}{2}}{\sqrt{\dfrac{4q-p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\dfrac{4q-p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{B-\dfrac{Ap}{2}}{\sqrt{\dfrac{4q-p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Интеграл от простейшей дроби IV типа можно найти методом интегрирования по частям с помощью рекуррентных соотношений, понижающих степень в знаменателе дроби или с помощью таблиц неопределенных интегралов.

Всякая неправильная рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель по правилам деления многочленов приводится к виду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, где $L_{n-m}(x)$ – многочлен – целая часть дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$; $R_k(x)$ – остаток при делении, при этом $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь $(k<m)$.

В результате интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена $L_{n-m}(x)$ и правильной дроби $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$.

Теорема. Пусть $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь ($n < m$), где, не ограничивая общности, считаем, что коэффициент при старшей степени x в многочлене $Q_m(x)$ равен 1. Пусть далее $Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \dots (x-b)^{\beta} \left(x^2 + px + q\right)^{\gamma} \dots \left(x^2 + rx + s\right)^{\delta}$ – разложение многочлена $Q_m(x)$ на произведение неприводимых (т. е. неразложимых в множестве $\mathbb{R}$) множителей, где $a, \dots, b$ – действительные корни $Q_m(x)$; $x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$ – квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней. Тогда имеет место следующее ***разложение*** (теоретическое, т. е. с неопределенными коэффициентами) правильной рациональной функции в сумму простейших:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots +$$
$$+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \dots + \frac{M_{\gamma} x + N_{\gamma}}{\left(x^2 + px + q\right)^{\gamma}} + \dots + \quad (3.3)$$
$$+\frac{K_1 x + L_1}{x^2 + rx + s} + \dots + \frac{K_{\delta} x + L_{\delta}}{\left(x^2 + rx + s\right)^{\delta}},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha}, B_1, B_2, \dots, B_{\beta}, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_{\gamma}, N_{\gamma}, K_1, L_1, \dots, K_{\delta}, L_{\delta}$ – некоторые действительные числа – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Из формулы (3.3) следует, что линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типов, а квадратным множителям – III и IV типов, при этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби.

Например, правильная дробь $\dfrac{x+7}{x^2(x+2)\left(x^2+7x+16\right)}$ представима в виде суммы четырех простейших дробей: $\dfrac{x+7}{x^2(x+2)\left(x^2+7x+16\right)} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+7x+16}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A_1, A_2, ..., L_δ в равенстве (3.3) можно применить ***метод неопределенных коэффициентов*** (метод сравнения коэффициентов). Суть метода:

1. В правой части равенства (3.3) приведем к общему знаменателю $Q_m(x)$, в результате получим тождество $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{S(x)}{Q_m(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то равны (тождественно) и числители:

$$P_n(x)\equiv S(x). \tag{3.4}$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (3.4), получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются искомые коэффициенты A_1, A_2, ..., L_δ.

Схема разложения правильной рациональной дроби на простейшие методом неопределенных коэффициентов представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Схема разложения правильной рациональной дроби на простейшие. Метод неопределенных коэффициентов

Этапы	Пример для дроби $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}$
1. Знаменатель уже разложен на множители, поэтому запишем теоретическое разложение дроби на простейшие	$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+3}$
2. Правую часть получившегося равенства приведем к общему знаменателю	$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}=\dfrac{A(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}+$ $+\dfrac{B\left(x^2+2x+3\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}$

Окончание табл. 3.1

Этапы	Пример для дроби $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$
3. Приравняем числители получившихся дробей с одинаковыми знаменателями, раскроем скобки и приведем подобные члены	$x^2+1=A(x-1)(x^2+2x+3)+B(x^2+2x+3)+$ $+(Cx+D)(x-1)^2$; $x^2+1=A(x^3+x^2+x-3)+B(x^2+2x+3)+$ $+C(x^3-2x^2+x)+D(x^2-2x+1)$
4. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D. Решаем эту систему	x^3: $0=A+C$; x^2: $1=A+B-2C+D \Rightarrow 3A+2D=1$; x: $0=A+2B+C-2D \Rightarrow B=D$; x^0: $1=-3A+3B+D \Rightarrow -3A+4D=1$; $\boxed{D=\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{3}}$ и $\boxed{A=\frac{1}{9}} \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{9}}$
5. Запишем разложение данной дроби на простейшие	$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\dfrac{\frac{1}{9}}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\dfrac{-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+3}$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A_1, A_2, ..., L_δ в равенстве (3.3) применяют также ***метод частных значений*** аргумента: после получения тождества (3.4) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов в формуле (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q_m(x)$). Схема разложения правильной рациональной дроби на простейшие методом частных значений приведена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Схема разложения правильной рациональной дроби на простейшие. Метод частных значений

Этапы	Пример для дроби $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$
1. Знаменатель дроби разложим на неприводимые множители	$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)$
2. Запишем соответствующее разложение этой правильной дроби на простейшие	$\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+1}$

Этапы	Пример для дроби $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$
3. Правую часть получившегося равенства приведем к общему знаменателю	$\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$
4. Приравняем числители получившихся дробей	$x^2+x-1=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$
5. Для определения коэффициентов A, B, C придаем неизвестной x частные значения, например значения, совпадающие с действительными корнями знаменателя дроби	$x=0 \quad -1=A(-2)\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$ $x=2 \quad 4+2-1=B\cdot 2\cdot 3\Rightarrow \boxed{B=\frac{5}{6}}$ $x=-1 \quad 1-1-1=C(-1)(-3)\Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{3}}$
6. Запишем разложение данной дроби на простейшие	$\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}+\dfrac{\frac{5}{6}}{x-2}-\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}$

Формула (3) справедлива для любого конечного числа линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя правильной дроби, и называется разложением правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами.

Алгоритм интегрирования рациональной функции

1. Представляем рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции (если она неправильная). Для этого числитель делим на знаменатель (например, «уголком»).

2. Раскладываем знаменатель полученной правильной рациональной функции на неприводимые множители (линейные и квадратичные, не имеющие действительных корней).

3. Записываем теоретическое разложение полученной правильной рациональной функции на простейшие.

4. Находим неопределенные коэффициенты.

5. Интегрируем рациональную функцию, представленную в виде суммы многочлена и простейших рациональных функций, по стандартным правилам интегрирования.

Пример 1. Найти $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная. Записываем теоретическое разложение подынтегральной дроби на простейшие:

$$\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)}.$$

Приравниваем числители: $2x+3 = A(x-2)+B(x+5)$. Придавая x частные значения, равные корням знаменателя, получаем:

$$\begin{array}{l|ll} x=-5 & -7 = A\cdot(-7), & A=1; \\ x=2 & 7=7B, & B=1. \end{array}$$

Таким образом, $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}$. Имеем:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x+5} = \ln|x-2| +$$

$$+\ \ln|x+5| + C = \ln|(x-2)(x+5)| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная, раскладываем ее на простейшие:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}.$$

Приравниваем числители:

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2$$

или

$$1 = A(x^3-6x^2+13x-10) + B(x^2-4x+5) + C(x^3-4x^2+4x) +$$

$$+D(x^2-4x+4).$$

Так как знаменатель дроби имеет один действительный корень $x = 2$, то находим B:

$$1 = B(4-8+5) \Rightarrow \boxed{B=1}.$$

Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=-6A+B-4C+D \\ x & 0=13A-4B+4C-4D \\ x^0 & 1=-10A+5B+4D \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow 0=-11A-12C=0 \\ \Rightarrow 1=3A+B+4C \end{array} \Rightarrow \boxed{A=0},$$

$\boxed{C=0}$ и $\boxed{D=-1}$.

Разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{1}{(x-2)^2\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}=\int\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)dx=$$

$$\underset{\boxed{x^2+4x+5=x^2+2\cdot 2x+4+1=(x+2)^2+1}}{=}\int(x-2)^{-2}\,d(x-2)-\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Метод рационализации: интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

Рациональной функцией $\boldsymbol{R(u;v)}$ ***двух переменных*** u и v называется отношение $\dfrac{P(u;\,v)}{Q(u;\,v)}$ многочленов $P(u;\,v)$ и $Q(u;\,v)$ двух переменных u и v.

Согласно методу рационализации, ищется подходящая замена переменных, которая приводит рассматриваемый интеграл к интегралу от рациональных функций. О таких заменах говорят, что они рационализуют интеграл.

Рассмотрим интеграл $\int R(\sin x;\cos x)dx$. Он рационализуется с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки

$$\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.}$$

Тогда $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом,

$$\boxed{\int R(\sin x;\cos x)\,dx \underset{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t}{=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \tilde{R}(t)\,dt,}$$

где $\tilde{R}(t)$ – рациональная функция переменной t.

С помощью указанного приема удобно находить интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4+\cos x + 4\sin x}$.

Решение. Используя универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, при этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{4+\cos x+4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4\cdot 2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4+4t^2+1-t^2+8t} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2+8t+5} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{3}t+\frac{5}{3}} = \left[t^2+\frac{8}{3}t+\frac{5}{3} = \left(t+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{t+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{t+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}\right| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t+\frac{5}{3}}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{5}{3}}\right| + C.$$

Метод интегрирования функций $R(\sin x;\cos x)$ с помощью универсальной подстановки $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ всегда приводит к интегрированию рациональной функции, но именно в силу своей общности он часто является не наилучшим.

На практике применяют и другие, более эффективные в конкретных случаях подстановки. В частности,

1) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительна $\sin x$, т. е. $R(-u;v) = -R(u;v)$, то подстановка $\boxed{\cos x = t}$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительна $\cos x$, т. е. $R(u;-v) = -R(u;v)$, то подстановка $\boxed{\sin x = t}$ рационализирует интеграл;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ удовлетворяет свойству $R(-u; -v) = R(u; v)$, то применима подстановка $\boxed{\mathrm{tg}x = t}$, при этом $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$;
такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\mathrm{tg}x)dx$.

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\cos^2 x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция не меняется при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$, то используем подстановку $\mathrm{tg}\, x = t$, при этом $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{4+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4+\dfrac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{4+4t^2+1} = \int \frac{dt}{4t^2+5} = \int \frac{dt}{(2t)^2+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{5}} + C \cdot$$

Пример 3. Найти $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

Решение. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg}x = t,\ x = \mathrm{arctg}t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^3 dt}{1+t^2}$ – подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Поэтому разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3 & t^2+1 \\ \underline{t^3+t} & t \\ -t & \end{array} \qquad \frac{t^3}{t^2+1} = t - \frac{t}{t^2+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{t^3}{t^2+1}dt = \int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \int tdt - \int \frac{tdt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} = \frac{1}{2}t^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right) + C = \left[\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + C = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln\left|\cos x\right| + C \cdot$$

Для нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – целые числа, используются следующие приемы:

1) подстановка $\boxed{\sin x = t}$, если n – нечетное число;

2) подстановка $\boxed{\cos x = t}$, если m – нечетное число;

3) формулы понижения порядка: $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)}$, $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)}$, $\boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x}$, если m и n – четные числа;

4) подстановка $\boxed{\mathrm{tg} x = t}$, если $m+n$ – четное отрицательное число.

Пример 4. Найти $\int \sin^5 x dx$.

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, поэтому применяем подстановку $\cos x = t$, тогда $\sin x dx = -dt$ и $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$

$$= -\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right) dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Пример 5. Найти $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$.

Решение. Под интегралом стоит произведение четных степеней $\sin x$ и $\cos x$. Тогда $\sin^4 x \cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{16}\sin^4 2x$ и

$$\int \cos^4 x \sin^4 x dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x dx = \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)\right)^2 dx = \frac{1}{64}\left(x - 2\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 8x\right) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C.$$

При нахождении интегралов $\int \sin(kx)\cos(lx) dx$, $\int \cos(kx)\cos(lx) dx$, $\int \sin(kx)\sin(lx) dx$ используют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big),\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big),\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big).\end{gathered}}$$

Пример 6. Найти $\int\sin 5x\cos 3xdx$.

Решение. $\int\sin 5x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 8x)dx=\frac{1}{2}\Big(\int\sin 2xdx+$ $+\int\sin 8xdx\Big)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 8x\right)+C=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$.

Метод рационализации: интегрирование простейших иррациональностей

1. ***Интегралы типа*** $\int R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, где $m_1,\ldots,m_k$ – целые; $n_1,\ldots,n_k$ – натуральные; a,b,c,d – действительные числа, причем $c^2+d^2\neq 0$, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки (заменой переменной):

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\nu}.}$$

Тогда

$$x=\frac{dt^{\nu}-b}{a-ct^{\nu}} \text{ и } dx=\frac{ad-bc}{\left(a-ct^{\nu}\right)^2}\nu\, t^{\nu-1}dt,$$

где $\nu=\text{НОК}\{n_1,\ldots,n_k\}$ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{m_1}{n_1},\ldots,\frac{m_k}{n_k}$.

В частности, интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt[k]{x};\ldots;\sqrt[m]{x}\right)dx$, где подынтегральная функция $R\left(x;\sqrt[k]{x};\ldots;\sqrt[m]{x}\right)$ – ***рациональная функция своих аргументов***, рационализуются заменой переменной

$$x=t^{\nu},\quad dx=\nu t^{\nu-1}dt,$$

где $\nu=\text{НОК}\{k,\ldots,m\}$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция искомого интеграла записана как функция корней второй и третьей степеней, наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Тогда данный интеграл может быть рационализован с помощью замены $\sqrt[6]{x}=t$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x}=t, x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3+2t^2}dt = \int \frac{6t^3}{t+2}dt = 6\int \frac{t^3+8-8}{t+2}dt =$$

$$=6\int \frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t+2}dt - 48\int \frac{dt}{t+2} = 6\int (t^2-2t+4)dt - 48\int \frac{d(t+2)}{t+2} =$$

$$=6\frac{t^3}{3} - 12\frac{t^2}{2} + 24t - 48\ln|t+2| + C = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48\ln\left(\sqrt[6]{x}+2\right) + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Решение. Выполним замену переменной:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t,\ \ x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \ dx=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt.$$

Тогда исходный интеграл примет вид $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int t\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt.$

Подынтегральная дробь правильная, раскладываем ее на простейшие:

$$\frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}.$$

Приравниваем числители:

$4t^2 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2$ или

$4t^2 = t^3(-A+C) + t^2(-A+B-C+D) + t(A+2B-C-2D) + (A+B-C+D).$

Так как знаменатель дроби имеет два действительных корня $t=1$, $t=-1$, то находим B и D:

при $t=1$ $\quad 4=4B \Rightarrow \boxed{B=1}$,

при $t=-1$ $\quad 4=4D \Rightarrow \boxed{D=1}$.

Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся методом неопределенных коэффициентов: $\begin{array}{c|l} t^3 & 0=-A+C \\ t^2 & 4=-A+B-C+D \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A=C=-1}$.

Получаем:

$$\int \frac{(-1)}{1-t}dt+\int \frac{1}{(1-t)^2}dt-\int \frac{1}{1+t}dt+\int \frac{dt}{(1+t)^2}=\ln|t-1|+\frac{1}{1-t}-\ln|1+t|-$$

$$-\frac{1}{1+t}+C=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{2t}{1-t^2}+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|+\frac{2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\frac{x-1}{x+1}}+C=$$

$$=\sqrt{x^2-1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right|+C=\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

2. ***Интегралы типа*** $\boldsymbol{\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$**,** где a, b, c – действительные числа, причем $a\neq 0$, $R(u;v)$ – рациональная функция переменных *u*, *v*. Подстановка $x+\dfrac{b}{2a}=u$ позволяет выделить полный квадрат под знаком корня. В результате исходный интеграл преобразуется к одному из следующих трех типов, которые с помощью дальнейших подстановок сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

$$\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\left|x+\frac{b}{2a}=u\right|=$$

$$=\begin{cases} \int \tilde{R}\left(u;\sqrt{\tilde{a}^2-u^2}\right)du=\left|u=\tilde{a}\sin t\right|=\int \tilde{R}(\sin t;\ \cos t)dt=\ldots, \\ \int \tilde{R}\left(u;\sqrt{\tilde{a}^2+u^2}\right)du=\left|u=\tilde{a}\mathrm{tg}t\right|=\int \tilde{R}(\sin t;\ \cos t)dt=\ldots, \\ \int \tilde{R}\left(u;\sqrt{u^2-\tilde{a}^2}\right)du=\left|u=\dfrac{\tilde{a}}{\sin t}\right|=\int \tilde{R}(\sin t;\ \cos t)dt=\ldots. \end{cases}$$

Пример. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл может быть рационализирован с помощью замены $x = 5\sin t$.

Имеем: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{5} \\ dx = 5\cos t dt \\ \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\cos t \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{5\cos t}{25\sin^2 t \cdot 5\cos t}dt = \frac{1}{25}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{25}\operatorname{ctg} t + C =$$

$$= -\frac{1}{25}\operatorname{ctg}\arcsin\frac{x}{5} + C = -\frac{1}{25}\frac{\cos\arcsin\frac{x}{5}}{\sin\arcsin\frac{x}{5}} + C = -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}{x} + C =$$

$$= -\frac{1}{25}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x} + C.$$

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащие квадратичные иррациональности:

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Вынося за символ интеграла $\frac{1}{\sqrt{a}}$ (если $a > 0$) или $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ (если $a < 0$), приведем интеграл к виду $\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ или $\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$.

Выделяя полные квадраты, получаем табличные интегралы:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}}} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4q+p^2}{4} - \left(x-\frac{p}{2}\right)^2}}.$$

Первый интеграл выражается через логарифмы, а второй при $4q + p^2 > 0$ – через арксинус; случай $4q + p^2 \le 0$ во втором интеграле не представляет интереса, поскольку не существует интервала, на котором подынтегральная функция определена.

II. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Этот интеграл можно разбить на два, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один интеграл берется непосредственно как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида I.

Рассмотрим некоторые примеры:

1) $\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{(t-1)^3}{t^4}dt = \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} -$

$-\frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + C;$

2) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ найден в примере на с. 129 с помощью стандартной подстановки. Рассмотрим другой способ (для определенности ограничимся случаем $x>1$; случай $x<-1$ рассматривается аналогично). Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

Мы ознакомились с некоторыми стандартными приемами нахождения неопределенных интегралов. Интегрирование чаще всего может быть выполнено не единственным способом. Владение искусством интегрирования заключается не только в знании методов интегрирования, но и в большей степени в «видении» различных подходов к интегрированию той или иной функции, что обычно приходит с опытом, после рассмотрения многих примеров.

Понятие о «неберущихся» интегралах

Как вытекает из алгоритма интегрирования рациональной функции, интеграл от всякой рациональной функции является функцией элементарной. Элементарными функциями будут и интегралы, полученные методом рационализации. Существуют, однако, элементарные функции, интегралы от которых элементарными функциями не являются. Такие интегралы принято называть «неберущимися». В качестве примеров «неберущихся» интегралов можно привести следующие:

$\int e^{-x^2}dx$; $\int \sin x^2 dx$;

$\int \frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{si} x$ – интегральный синус;

$\int \frac{\cos x}{x}dx = \operatorname{ci} x$ – интегральный косинус.

3.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.

2. Приведите примеры двух различных первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

3. Найдите первообразную для функции $f(x)=\cos x$, которая в точке $x=\frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

4. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

5. Всякая ли функция имеет первообразную? Рассмотрите пример: $f(x)=\begin{cases} 1 & \textit{при } x>0, \\ -2 & \textit{при } x\le 0. \end{cases}$

6. Для каких x справедливы формулы:

а) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; б) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;

в) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$; г) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$?

7. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

8. Найдите:

а) $\int 0\,dx$; б) $\int dx$; в) $\left(\int dx\right)'$;

г) $\int \left(u'(x)+v'(x)\right)dx$; д) $\int \left(u'(x)v(x)+u(x)\,v'(x)\right)dx$;

е) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; ж) $\int f(x)f'(x)dx$.

9. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов и проверьте формулы дифференцированием.

10. Известно, что две первообразные для функции $f(x)=e^x$ в точке $x=1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x=100$?

11. График какой первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ проходит через точку с координатами $(1;\ 2\pi)$?

12. Изложите метод интегрирования путем подведения функции (поднесение множителя) под знак дифференциала.

13. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?

14. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?

15. Запишите основные типы интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

16. Какая рациональная дробь называется правильной?

17. Что значит «выделить целую часть неправильной дроби»?

18. На какие простейшие действительные множители можно разложить многочлен с действительные корнями?

19. Как интегрировать простейшие дробно-рациональные функции?

20. Опишите метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей.

21. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональной функции.

22. Какие подстановки используются для нахождения интеграла $\int R(\sin x;\ \cos x)dx$, если подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$, $\cos x$. Приведите примеры.

23. Сформулируйте правила нахождения интегралов:

а) $\int \sin kx \cos mx\, dx$; б) $\int \cos kx \cos mx\, dx$; в) $\int \sin kx \sin mx\, dx$.

24. Какая подстановка рационализует интеграл от дробно-линейной иррациональности:

а) $\int R\left(x;\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$; б) $\int R\left(x;\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$; в) $\int R\left(x;\ \sqrt[k]{x};\ \sqrt[m]{x};\ \ldots\right)dx$?

25. Как находятся интегралы вида $\int \dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$?

26. С помощью каких подстановок находятся интегралы
а) $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; б) $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$; в) $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$?

3.3. ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Вспомогательные сведения

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.	2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.	3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.
4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.	5. $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.	

Непосредственное интегрирование

Найдите неопределенные интегралы с помощью основных свойств и таблицы интегралов. Проверьте результат дифференцированием:

1. $\int\left(3\cos x - 2x^2 + 5 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{1+x^2}\right)dx$.

2. $\int \dfrac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - \dfrac{5}{x}}{x^2}dx$.

3. $\int \dfrac{\sqrt{x} + x^3e^x - x^2}{x^3}dx$.

4. $\int \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\sqrt{x}}dx$.

5. $\int \dfrac{7 + 4\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$.

6. $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$.

7. $\int 2^x e^x dx$.

8. $\int \dfrac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9. $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$, $\boxed{\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}}$.

10. $\int \dfrac{x^3 - 27}{x-3}dx$.

11. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$, $\boxed{\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1}$.

12. $\int u^3 du$.

13. $\int \operatorname{tg}^3 x\, d\left(\operatorname{tg} x\right)$.

14. $\int \sqrt{\cos t}\, d\left(\cos t\right)$.

15. $\int \frac{\cos^2 t}{1-\sin t} dt$.

16. $\int \frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} dt$, $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$.

17. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$.

18. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$.

19. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$.

20. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$, $\boxed{\begin{array}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \end{array}}$.

21. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

22. $\int 12 \sin^2 3t dt$.

23. $\int \mathrm{tg} \frac{t}{3} dt$.

24. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$.

25. $\int \left(\sqrt{\cos x} + \sin x\right)^2 dx$.

26. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+10}$.

27. $\int \left(\sqrt{x}+1\right) x^3 dx$.

28. $\int \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - 2x^2 + 5\right) dx$.

29. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^5} dx$.

30. $\int \frac{6+2\cos^3 x}{\cos^2 x} dx$.

31. $\int \frac{3xe^x - 2}{x} dx$.

32. $\int \frac{dx}{27+3x^2}$.

33. $\int \frac{dx}{32-2x^2}$.

34. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{8}{\sqrt{9+x^2}}\right) dx$.

35. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(x^2+1)} dx$.

36. $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$.

37. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

38. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

39. $\int \frac{\sqrt{6+x^2} - \sqrt{6-x^2}}{\sqrt{36-x^4}} dx$.

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Найдите $f(x)$:

41. $\int f(x)dx = 2\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{2} + C$.

42. $\int f(x)dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + C$.

Найдите интегралы, содержащие квадратный трехчлен:

43. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+3}$.

44. $\int \dfrac{5dx}{2x^2+6x+1}$.

45. $\int \dfrac{x-2}{x^2+7x+12}dx$.

46. $\int \dfrac{3-4x}{2x^2-3x+2}dx$.

47. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

48. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

49. $\int \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

50. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Найдите неопределенные интегралы внесением (подведением) множителя под знак дифференциала (выделяя дифференциал новой переменной):

1. $\int (4x+3)^{10}dx$.

2. $\int \dfrac{3}{(3-2x)^5}dx$.

3. $\int \sqrt{3-\dfrac{x}{2}}dx$.

4. $\int \sqrt[7]{(3-1{,}5x)^5}dx$.

5. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

6. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[4]{3+4x^2}}$.

7. $\int \dfrac{7xdx}{\sqrt[6]{\left(8-3x^2\right)^5}}$.

8. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

9. $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}dx$.

10. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

11. $\int \dfrac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$.

12. $\int \dfrac{1}{\arcsin^2 x}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctgx}}$.

14. $\int \dfrac{dx}{x(\ln x - 5)}$.

15. $\int \dfrac{dx}{2\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)}$.

16. $\int \dfrac{e^x dx}{2e^x+1}$.

17. $\int e^{-\frac{x}{2}+5}dx$.

18. $\int \dfrac{dx}{5\arccos x\sqrt{1-x^2}}$.

19. $\int \dfrac{3^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$.

20. $\int \cos(2-3x)dx$.

21. $\int \dfrac{xdx}{\sin^2\left(7x^2\right)}$.

22. $\int \dfrac{dx}{\cos^2(3+5x)}$.

23. $\int \sin\left(\dfrac{\pi}{12}-2x\right)dx$.

24. $\int e^x \sin e^x dx$.

25. $\int \sqrt{3-2\sin x}\cos x dx$. 26. $\int \frac{dx}{2x-3}$. 27. $\int \frac{e^{3x}dx}{3-e^{3x}}$.

28. $\int \mathrm{tg} x dx$. 29. $\int \mathrm{ctg} 3x dx$. 30. $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x+25\right)}$.

31. $\int e^{\cos x}\sin x dx$. 32. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$. 33. $\int e^{-x^2} x dx$.

34. $\int \frac{dx}{4+5x^2}$. 35. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-5}}$. 36. $\int \frac{dx}{\sqrt{10-3x^2}}$.

37. $\int \frac{dx}{3x^2-1}$. 38. $\int \frac{\sin x}{7+\cos^2 x}dx$. 39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$.

40. $\int \frac{5x-3}{x^2+2}dx$. 41. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$. 42. $\int \frac{xdx}{2x-1}$.

43. $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}dx$. 44. $\int \frac{5x+3}{x+1}dx$.

Найдите интегралы, применяя метод подстановки:

45. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x}}$. 46. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$, $\boxed{\sqrt{x+3}=t}$.

47. $\int \frac{x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$. 48. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$, $\boxed{x=t^3}$.

49. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$. 50. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$, $\boxed{x=t^6,\ t\geq 0}$.

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$, $\boxed{x=t^4,\ t>0}$. 52. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $\boxed{\sqrt{e^x+1}=t}$.

53. $\int \frac{2x}{(5-2x)^3}dx$. 54. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+2x}}$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$, $\boxed{x=2\,\mathrm{tg}\, t}$. 56. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $\boxed{x=\sin t \text{ или } x=\frac{1}{t}}$.

57. $\int \frac{dx}{e^x-1}$, $\boxed{e^x=t}$. 58. $\int x\sqrt[3]{a+x}dx$.

59. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$, $\boxed{\sqrt{e^x+1}=t}$.

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Методом интегрирования по частям найдите интегралы:

1. $\int (5x-3)\sin 2x dx$.
2. $\int (x+1)\ln x dx$.
3. $\int x e^{-3x} dx$.
4. $\int x 3^x dx$.
5. $\int \text{arctg} 2x\, dx$.
6. $\int x^2 \cos 3x\, dx$.
7. $\int x \,\text{arcctg} x\, dx$.
8. $\int \arcsin \frac{x}{3} dx$.
9. $\int \ln^2 x\, dx$.
10. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.
11. $\int (x^2-5x-3)\sin(x+1) dx$.
12. $\int \ln(1+x^2) dx$.

Интегрирование рациональных функций

Укажите, какие из указанных рациональных дробей являются правильными. Выделите целую часть в неправильных дробях:

1. $\frac{2}{x+5}$.
2. $\frac{2x}{x+5}$.
3. $\frac{7x^2+1}{x^2-1}$.
4. $\frac{3x^2+1}{x^3+1}$.
5. $\frac{x^2}{x+3}$.
6. $\frac{x^5-4x^3}{x^2-x+1}$.

Найдите неопределенные интегралы от простейших рациональных функций (дробей):

7. $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$.
8. $\int \frac{dx}{3x+5}$.
9. $\int \frac{5}{2x^2+6x+5} dx$.
10. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x-2} dx$.
11. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$.
12. $\int \frac{8-3x}{2x^2+x-1} dx$.

Разложите дробь на простейшие, не находя коэффициентов разложения:

13. $\frac{3x^2+2x-5}{x(x-1)^3}$.
14. $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+2)}$.
15. $\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.
16. $\frac{x^3+x}{x^4-81}$.
17. $\frac{7}{(x^2-5x+4)(x^2-5x+7)}$.
18. $\frac{x-2}{x^2(x^2+4)^2}$.

19. $\dfrac{2x+3}{\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2-x+3\right)}$. 20. $\dfrac{x^3+x^2}{\left(x^4-16\right)\left(x^3+8\right)}$.

21. $\dfrac{x^2+3x+1}{\left(4x^3+4x^2+7x\right)^2}$.

Найдите интегралы от рациональных функций:

22. $\int\dfrac{x^2+3x+5}{x+2}dx$. 23. $\int\dfrac{xdx}{(x+2)(2x+1)}$. 24. $\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

25. $\int\dfrac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$. 26. $\int\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2\dfrac{dx}{x}$. 27. $\int\dfrac{x^3+2}{x^3-x^2}dx.$

28. $\int\dfrac{dx}{x\left(x^2+4\right)}$. 29. $\int\dfrac{3x+1}{\left(x^2+6x+9\right)(x-5)}dx$.

30. $\int\dfrac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$. 31. $\int\dfrac{x^5}{x^4-1}dx$. 32. $\int\dfrac{x^2dx}{1-x^4}$.

33. $\int\dfrac{x^3}{x^3-1}dx$. 34. $\int\left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$.

35. $\int\dfrac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}dx$, $\boxed{\dfrac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}=\dfrac{\left(1+x^7\right)-2x^7}{x\left(1+x^7\right)}=\dfrac{1+x^7}{x\left(1+x^7\right)}-2\dfrac{x^7}{x\left(1+x^7\right)}}$.

Метод рационализации: интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

Найдите интегралы с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

1. $\int\dfrac{dx}{2+\cos x}$. 2. $\int\dfrac{dx}{4-3\sin x}$. 3. $\int\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

4. $\int\dfrac{2+\cos x}{3-\sin x}dx$. 5. $\int\dfrac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. 6. $\int\dfrac{dx}{\sin x}$.

Найдите интегралы с помощью подходящей подстановки:

7. $\int\dfrac{\sin x}{\left(\dfrac{1}{3}+\cos x\right)^2}dx$. 8. $\int\dfrac{\cos^3 x}{3-\sin^2 x}dx$. 9. $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

10. $\int \frac{2\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$. 11. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$. 12. $\int \sin^3 2x \cos^3 2x dx$.

13. $\int \frac{dx}{4 - 3\sin^2 x}$. 14. $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 6\cos^2 x} dx$. 15. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$.

Найдите интегралы:

16. $\int \cos 3x \sin 5x \, dx$. 17. $\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{7x}{2} \, dx$.

18. $\int \sin 3x \sin 8x \, dx$. 19. $\int \sin^5 x dx$.

20. $\int \cos^4 2x \, dx$. 21. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

22. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3} \, dx$. 23. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \sin^2 x} dx$.

24. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$. 25. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$.

26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$. 27. $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} \, dx$.

28. $\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$. 29. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Метод рационализации: интегрирование простейших иррациональностей

Найдите интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 9}}$. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

4. $\int \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$. 5. $\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x + 3} + 5} dx$.

7. $\int \sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^6 dx$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}}$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 3x} - 2}$.

10. $\int \frac{dx}{2\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}$. 11. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\left(\sqrt{x} - 3\right)^6}$. 12. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(5x - 2)^2}}$.

13. $\int \frac{2 + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$. 14. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{3x - 1} + 1} dx$. 15. $\int \frac{dx}{\left(2 + \sqrt{x}\right)^3}$.

16. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$. 17. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$. 18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$.

19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5+x^2}}$. 20. $\int \sqrt{5-x^2}dx$. 21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

С помощью каких подстановок можно вычислить следующие интегралы:

22. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$. 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$. 24. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4}dx$.

25. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$. 26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$?

Минимум для аудиторной работы

Непосредственное интегрирование: 1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 24; 26; 30; 31; 32; 33; 35; 40; 43; 45; 48; 49.

Замена переменной в неопределенном интеграле: 1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 12; 13; 14; 16; 19; 20; 21; 25; 28; 29; 31; 35; 36; 38; 39; 42; 43; 45; 49; 50; 53; 55; 56.

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле: 1; 4; 7; 9; 11.

Интегрирование рациональных функций: 1; 2; 6; 10; 12; 13; 16; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 29; 31.

Метод рационализации: интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических: 1; 3; 4; 7; 8; 11; 12; 15; 16; 20; 23; 24; 25.

Метод рационализации: интегрирование простейших иррациональностей: 3; 4; 8; 9; 12; 13; 16; 18.

3.4. ОТВЕТЫ

Непосредственное интегрирование

1. $3\sin x-\frac{2}{3}x^3+5x+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C$.

2. $2x^3-4x^2-4x+3\ln|x|+\frac{5}{2x^2}+C$.

3. $-\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}+e^{x}-\ln|x|+C$.

4. $2\sqrt{x}-2\ln|x|-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$.

5. $-7\operatorname{ctg}x+4x+C$.

6. $\arcsin\dfrac{x}{3}+3\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-9}\right|+C$.

7. $\dfrac{2^{x}e^{x}}{\ln 2+1}+C$.

8. $2\arcsin x-x+C$.

9. $x-\operatorname{arctg}x+C$.

10. $\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{3}{2}x^{2}+9x+C$.

11. $-\operatorname{ctg}x-x+C$.

12. $\dfrac{u^{4}}{4}+C$.

13. $\dfrac{\operatorname{tg}^{4}x}{4}+C$.

14. $\dfrac{2\cos t\sqrt{\cos t}}{3}+C$.

15. $t-\cos t+C$.

16. $\sin t-\cos t+C$.

17. $3x-2\cdot\dfrac{3^{x}}{2^{x}\left(\ln 3-\ln 2\right)}+C$.

18. $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}x}{2}+\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+2}\right|+C.$

19. $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$.

20. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$.

21. $-2\operatorname{ctg}2x+C$.

22. $6t-\sin 6t+C$.

23. $-3\ln\left|\cos\dfrac{t}{3}\right|+C$.

24. $\sqrt{x^{2}+2x}+C$.

25. $\sin x-\dfrac{4}{3}\cos x\sqrt{\cos x}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

26. $\dfrac{1}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{3}+C$.

27. $\dfrac{2}{9}x^{4}\sqrt{x}+\dfrac{x^{4}}{4}+C$.

28. $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x^{2}}-\dfrac{2}{3}x^{3}+5x+C$.

29. $-\dfrac{3}{11x^{3}\sqrt[3]{x^{2}}}-\dfrac{1}{4x^{4}}+C$.

30. $6\operatorname{tg}x+2\sin x+C$.

31. $3e^{x}-2\ln|x|+C$.

32. $\dfrac{1}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+C$.

33. $\dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{4+x}{4-x}\right|+C$.

34. $2\arcsin\dfrac{x}{2}-8\ln\left|x+\sqrt{9+x^{2}}\right|+C.$

35. $-\dfrac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C$.

36. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2x}{3}+C$.

37. $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$.

38. $3\sqrt[3]{x}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$.

39. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}-\ln\left|x+\sqrt{6+x^2}\right|+C$.

40. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$

43. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

44. $\frac{5}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}}\right|+C$.

45. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+7x+12\right|-\frac{11}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x+4}\right|+C.$

46. $-\ln\left|2x^2-3x+2\right|+C$.

47. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

48. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

49. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

50. $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$.

Замена переменной в неопределенном интеграле

1. $\frac{(4x+3)^{11}}{44}+C$.

2. $\frac{3}{8(3-2x)^4}+C$.

3. $-\frac{1}{3}\left(3-\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

4. $-\frac{7}{18}\sqrt[7]{(3-1{,}5x)^{12}}+C$.

5. $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

6. $\frac{\sqrt[4]{\left(3+4x^2\right)^3}}{6}+C$.

7. $-7\sqrt[6]{\left(8-3x^2\right)}+C$.

8. $\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

9. $-\frac{5\sqrt[5]{\cos^3 x}}{3}+C$.

10. $\frac{3\ln x\sqrt[3]{\ln x}}{4}+C$.

11. $\frac{\operatorname{arctg}^5 x}{5}+C$.

12. $-\frac{1}{\arcsin x}+C$.

13. $2\sqrt{1-\operatorname{ctg}x}+C$.

14. $\ln\left|\ln x-5\right|+C$.

15. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{arctg}x\right|+C$.

16. $\frac{1}{2}\ln\left|2e^x+1\right|+C$.

17. $-2e^{-\frac{x}{2}+5}+C$.

18. $-\frac{1}{5}\ln\left|\arccos x\right|+C$.

19. $2\frac{3^{\sqrt{x+1}}}{\ln 3}+C$.

20. $-\frac{1}{3}\sin\left(2-3x\right)+C$.

21. $-\frac{1}{14}\operatorname{ctg}7x^2+C$.

22. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}\left(3+5x\right)+C$.

23. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}-2x\right)dx+C$.

24. $-\cos e^x+C$.

25. $-\frac{\sqrt{\left(3-2\sin x\right)^3}}{3}+C$.

26. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-3\right|+C$.

27. $-\frac{1}{3}\ln\left|3-e^{3x}\right|+C$.

28. $-\ln\left|\cos x\right|+C$.

29. $\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x\right|+C$.

30. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{5}+C$.

31. $-e^{\cos x}+C$.

32. $e^{-\cos x}+C$.

33. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

34. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2}+C$.

35. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-5}\right|+C$.

36. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{10}}+C$.

37. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right|+C$.

38. $-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{7}}+C$.

39. $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-9}\right|+C$.

40. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

41. $2\sqrt{3x^2-5x+4}+C$.

42. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln\left|2x-1\right|+C$.

43. $-\ln\left|4+3x-x^2\right|+C$.

44. $5x-2\ln\left|x+1\right|+C$.

45. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}+C$.

46. $2\sqrt{x+3}-4\ln\left|2+\sqrt{x+3}\right|+C$.

47. $\frac{2}{9}\left(\frac{\left(\sqrt{1-3x}\right)^3}{3}+17\sqrt{1-3x}\right)+C$.

48. $3\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{2}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$.

49. $\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$.

50. $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

51. $2\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$.

52. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$.

53. $\dfrac{1}{2(2x-5)}+\dfrac{5}{4(5-2x)^2}+C$.

54. $\sqrt{1+2x}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{1+2x}+3\sqrt[6]{1+2x}-3\ln\left|1+\sqrt[6]{1+2x}\right|+C$.

55. $\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$.

56. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

57. $\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x}\right|+C$.

58. $\dfrac{3}{7}\sqrt[3]{(a+x)^7}-\dfrac{3}{4}a\sqrt[3]{(a+x)^4}+C.$

59. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}-2\sqrt{e^x+1}+C$.

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

1. $-\dfrac{5x-3}{2}\cos 2x+\dfrac{5}{4}\sin 2x+C$.

2. $\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\dfrac{x^2}{4}-x+C$.

3. $-\dfrac{x}{3}e^{-3x}-\dfrac{1}{9}e^{-3x}+C$.

4. $\dfrac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\dfrac{3^x}{\ln^2 3}+C$.

5. $x\,\mathrm{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$.

6. $\dfrac{x^2}{3}\sin 3x-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{x}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{9}\sin 3x\right)+C$.

7. $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}\,x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,x+C$.

8. $x\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}+C$.

9. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

10. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$.

11. $\left(5x+5-x^2\right)\cos(x+1)+(2x-5)\sin(x+1)+C$.

12. $x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$.

Интегрирование рациональных функций

1. Дробь правильная.

2. Дробь неправильная: $\dfrac{2x}{x+5}=2-\dfrac{10}{x+5}$.

3. Дробь неправильная: $\dfrac{7x^2+1}{x^2-1}=7+\dfrac{8}{x^2-1}$.

4. Дробь правильная.

5. Дробь неправильная: $\dfrac{x^2}{x+3}=x-3+\dfrac{9}{x+3}$.

6. Дробь неправильная: $\dfrac{x^5-4x^3}{x^2-x+1}=x^3+x^2-4x-5+\dfrac{5-x}{x^2-x+1}$.

7. $-\dfrac{1}{4x-2}+C$.

8. $\dfrac{1}{3}\ln|3x+5|+C$.

9. $5\operatorname{arctg}(2x+3)+C$.

10. $-\ln\left|2x^2-3x-2\right|+C$.

11. $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-7x+12\right|+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x-4}{x-3}\right|+C$.

12. $\dfrac{35}{12}\ln\left|\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right|-\dfrac{3}{4}\ln\left|x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right|+C$.

13. $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

14. $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$.

15. $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

16. $\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+9}$.

17. $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-4}+\dfrac{Cx+D}{x^2-5x+7}$.

18. $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$.

19. $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+3}$.

20. $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}+\dfrac{Fx+G}{x^2-2x+4}$.

21. $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{4x^2+4x+7}+\dfrac{Ex+F}{(4x^2+4x+7)^2}$.

22. $\dfrac{x^2}{2}+x+3\ln|x+2|+C$.

23. $\dfrac{2}{3}\ln|x+2|-\dfrac{1}{6}\ln|2x+1|+C$.

24. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+7\ln|x-2|+3\ln|x+2|+C$.

25. $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{5}{2}\ln|x-2|+\frac{10}{3}\ln|x-3|+C$.

26. $-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+4\ln|x|+C$.

27. $x+\frac{2}{x}-2\ln|x|+3\ln|x-1|+C$. **28.** $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln|x^2+4|+C$.

29. $-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x+3}\right|+C$.

30. $-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

31. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C$. **32.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

33. $x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(2x+1\right)}{3}+C$.

34. $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+C$. **35.** $\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$.

Метод рационализации: интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$. **2.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\sqrt{7}}+C$.

3. $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

4. $\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{8}}+C$.

5. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$. **6.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

7. $\dfrac{3}{1+3\cos x}+C$.

8. $\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+\sin x}{\sqrt{3}-\sin x}\right|+C$.

9. $\dfrac{\sin^3 x}{3}-\dfrac{\sin^5 x}{5}+C$.

10. $\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

11. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C$.

12. $\dfrac{\sin^4 2x}{8}-\dfrac{\sin^6 2x}{12}+C$.

13. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(2\operatorname{ctg}x\right)+C$.

14. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\cos x\right)+C$.

15. $-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\dfrac{\operatorname{ctg}^5 x}{25}+C$.

16. $-\dfrac{1}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{16}\cos 8x+C$.

17. $\dfrac{1}{6}\sin 3x+\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$.

18. $\dfrac{1}{10}\sin 5x-\dfrac{1}{22}\sin 11x+C$.

19. $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{\cos^5 x}{5}+C$.

20. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{8}\sin 4x+\dfrac{1}{64}\sin 8x+C$.

21. $\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{64}\sin 4x-\dfrac{1}{192}\sin 6x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

22. $\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{3}-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+x+C$.

23. $\dfrac{1}{4}\ln\left(1+2\operatorname{tg}^2 x\right)+C$.

24. $-\dfrac{1}{5\sin^5 x}+\dfrac{1}{3\sin^3 x}+C$.

25. $\operatorname{tg}x-\dfrac{2}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$.

26. $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|+C$.

27. $2\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|-x+C$.

28. $\ln\left|\cos x+\sin x\right|+C$.

29. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+C$.

Метод рационализации: интегрирование простейших иррациональностей

1. $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right|+C$.

2. $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+9}\right|+C$.

3. $\arcsin\left(x-1\right)+C$.

4. $3\sqrt{x^2+2x+2}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

5. $5\sqrt{x^2-x+1}+\frac{11}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$.

6. $\left(\sqrt{x+3}-5\right)^2+50\ln\left|\sqrt{x+3}+5\right|+C$.

7. $\frac{2}{9}\left(2+\sqrt{x}\right)^9-\left(2+\sqrt{x}\right)^8+\frac{8}{7}\left(2+\sqrt{x}\right)^7+C$.

8. $3\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}+24\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|+C$.

9. $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-3x)^2}-2\sqrt[3]{1-3x}-4\ln\left|\sqrt[3]{1-3x}-2\right|+C$.

10. $2\left(\sqrt[4]{x}-2\right)^2+16\ln\left|\sqrt[4]{x}+2\right|+C$.

11. $-\frac{2}{3\left(\sqrt{x}-3\right)^3}-\frac{3}{\left(\sqrt{x}-3\right)^4}-\frac{18}{5\left(\sqrt{x}-3\right)^5}+C$.

12. $\frac{3}{100}\sqrt[3]{(5x-2)^4}+\frac{6}{25}\sqrt[3]{5x-2}+C\cdot$

13. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$.

14. $\frac{2}{27}\sqrt{(3x-1)^3}-\frac{1}{9}(3x-1)+\frac{10}{9}\sqrt{3x-1}-\frac{10}{9}\ln\left(\sqrt{3x-1}+1\right)+C\cdot$

15. $-\frac{2}{2+\sqrt{x}}+\frac{2}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}+C$.

16. $-\operatorname{ctg}\arcsin x-\arcsin x+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C\cdot$

17. $-\frac{1}{3\sin^3\operatorname{arctg}x}+C=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C$.

18. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}}{2}\right|+C$.

19. $-\frac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\right)^{-1}+C$.

20. $\frac{x}{2}\sqrt{5-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

21. $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\arcsin x+C.$

22. $x=a\sin t$.

23. $x=\frac{a}{\sin t}$.

24. $x=a\operatorname{tg}t$.

25. $x=a\sin t$.

26. $x=a\operatorname{tg}t$.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРЫ

4.1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4.1.1. Теоретический минимум

1. Определение матрицы, виды матриц.
2. Действия над матрицами.
3. Определители.
4. Обратная матрица.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
6. Решение систем методом Гаусса.

Определение матрицы, виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел (или других математических объектов) – элементов матрицы, расположенных в m строках и n столбцах:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} – элемент, принадлежащий i-й строке и j-му столбцу матрицы; числа i, j называются ***индексами*** элемента.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C и т. д. или $A = \left[a_{ij} \right] = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$, если указываются элементы и размер матрицы.

Матрицы A и B одинаковых размеров называются ***равными***, если равны их соответствующие элементы:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n}\,.}$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется ***нулевой***. Она обозначается $O_{m \times n}$.

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***.

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной*** матрицей. Обозначается I_n или E_n. Например,

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** к данной. Матрицу, транспонированную к матрице $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$, обозначают $A^T = \left[b_{ij}\right]_{n \times m}$, где $b_{ij} = a_{ji}$; $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$.

Если исходная матрица имеет размер $m \times n$, то транспонированная к ней будет иметь размер $n \times m$. Например, если

$B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, то $B^T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Действия над матрицами

Суммой (разностью) $C = A + B$ $\left(C = A - B\right)$ двух матриц $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ и $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ называется такая матрица $C = \left[c_{ij}\right]_{m \times n}$, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\left(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\right)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Отметим, что складываются матрицы одинаковых размеров.

Произведением матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ***на число*** λ (или числа λ на матрицу A) называется матрица $C = \left[c_{ij}\right]_{m \times n}$, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на λ, т. е. $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Записывают $C = \lambda \cdot A$ или $C = A \cdot \lambda$.

Операции сложения, вычитания и умножения на число называют ***линейными операциями*** над матрицами. Выражение $\alpha A + \beta B$ называется линейной комбинацией матриц A и B.

Пример.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Найти $A + B,\ 3B,\ A - B,\ A + 3B$.

Решение.

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+1 & 6-1 & 7+3 \\ -1+2 & 2+0 & 3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix};\ 3B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 0 & 21 \end{bmatrix};$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix};\ A + 3B = \begin{bmatrix} 5+3 & 6-3 & 7+9 \\ -1+6 & 2+0 & 3+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 24 \end{bmatrix}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times s$ ***на матрицу*** B размера $s \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой равны $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj}$, т. е. чтобы получить c_{ij}, нужно элементы i-й строки A умножить на соответствующие элементы j-го столбца B и полученные произведения сложить.

Согласно этому определению, произведение матриц существует, если число столбцов первой из них равно числу строк второй.

Например,

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 7 & -5 & 21 \end{bmatrix}.$$

Элемент c_{11} получаем, умножив элементы первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B и сложив эти произведения, т. е.

$$c_{11} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1.$$

Аналогично

$$c_{12} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 5;\ c_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 13;\ c_{21} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 7;$$

$$c_{22} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = -5;\ c_{23} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 21.$$

Из определения произведения матриц следует, что не всякие матрицы можно перемножить. Например, произведение

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

не существует, т. к. строка матрицы $B_{2\times3}$ содержит 3 элемента, а столбец матрицы $A_{2\times2}$ только 2 элемента.

Для квадратных матриц одного порядка оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, но в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Например,

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 19 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}, \text{ а } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

Определители

Определитель – это числовая характеристика (функция) квадратной матрицы.

Определитель матрицы обозначают символами $\det A$, $|A|$ или буквами D, Δ и др. Записывают определитель в виде такой же таблицы, как и матрицу, используя вместо скобок вертикальные линии.

Определитель матрицы вычисляется по следующему правилу.

Определитель квадратной матрицы ***1-го порядка***: $\det A = \det\left[a_{11}\right] = a_{11}$.
Определитель квадратной матрицы ***2-го порядка***: $\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
Определитель квадратной матрицы ***3-го порядка***: $\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.
Определитель квадратной матрицы ***n*-го порядка:** $\det\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \underset{\substack{\text{разложение} \\ \text{по } i\text{-й строке}}}{=} a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in} =$ $\underset{\substack{\text{разложение} \\ \text{по } j\text{-му столбцу}}}{=} a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – ***алгебраическое дополнение*** к элементу a_{ij} определителя; M_{ij} – определитель (минор) матрицы, получающийся из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot 9 - 2\cdot 7 = 22; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot 5 - 3\cdot 2 = -11;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(0+6) - 1\cdot(16-2) + 3\cdot(12+0) = 12 - 14 + 36 = 34.$$

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$). В противном случае ($\det A = 0$) матрица A называется ***вырожденной***.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Всякая невырожденная матрица $A = \left[a_{ij}\right]$ имеет (единственную) ***обратную*** к ней матрицу A^{-1}, определяемую соотношением $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left[A_{ij}\right]^T$, где элемент A_{ij} матрицы $\left[A_{ij}\right]$ является алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} матрицы A.

Пример. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение.

1. Вычислим определитель $\det A = 34 \neq 0$.
2. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Транспонируем матрицу алгебраических дополнений:

$$\left[A_{ij}\right]^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -14 & 11 & 16 \\ 12 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[A_{ij}\right]^T = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -14 & 11 & 16 \\ 12 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

Система n уравнений с n неизвестными называется ***линейной***, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных и b_i – свободные члены ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$) – заданные числа.

Упорядоченный набор чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$ называется ***решением системы***, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Система уравнений, у которой все свободные члены равны нулю, называется ***однородной***.

Однородная система всегда совместна, т. к. она всегда имеет нулевое решение.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется ***определителем системы***.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},}$$

где Δ_j $(j = \overline{1, n})$ – определитель, полученный из Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы.

Пример 1. Установить, совместна ли система и, если она совместна, найти ее решение по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\Delta = 12 \neq 0$, система совместна и имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Определитель Δ_1 получим из Δ, заменив первый столбец столбцом свободных членов системы, т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -4 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 36.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3.$

Определитель Δ_2 получится из Δ заменой 2-го столбца столбцом свободных членов, а Δ_3 – заменой 3-го столбца столбцом свободных членов. Вычислим их:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -24, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 12.$$

Следовательно,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{12} = -2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1.$$

Решение системы имеет вид $(3; -2; 1)$.

Пример 2. Найти решения систем 2-го порядка; дать геометрическую интерпретацию полученного результата:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 4x + 5y = 2; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 4x - 6y = 8; \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 4x - 6y = 2. \end{cases}$$

Решение.

1) определитель системы равен $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение.

Так как $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14,$

то $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{21}{7} = 3, \quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{14}{7} = -2.$

Найденное решение $(3; -2)$ – точка пересечения прямых $3x + 2y = 5$ и $4x + 5y = 2$;

2) так как определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$, решить систему по формулам Крамера нельзя.

Однако можно легко исследовать эту систему, исходя из того, что каждое уравнение системы – это уравнение прямой. Прямые $2x - 3y = 1$ и $4x - 6y = 8$ (или $2x - 3y = 4$) параллельны и не имеют общих точек. Следовательно, данная система несовместна;

3) в этом случае определитель системы также равен нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$, но в отличие от решения второй системы оба уравнения $2x - 3y = 1$ и $4x - 6y = 2$ определяют одну и ту же прямую (сократив

обе части второго уравнения на 2, получим первое). Следовательно, данная система имеет бесчисленное множество решений – ими будут все точки прямой $2x-3y=1$. Эти решения можно записать в виде

$$y=c,\ x=\frac{1+3c}{2},\ \text{т. е.}\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}c, \\ y=c, \end{cases} \ c\in\mathbb{R}.$$

Решение систем методом Гаусса

Метод Гаусса является наиболее универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому, в частности, треугольному виду (см. примеры 1, 2). На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной системы.

Опишем прямой ход метода Гаусса. Будем считать, что в исходной системе элемент $a_{11}\neq 0$. Если же $a_{11}=0$, то первым в системе запишем то уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля. Преобразуем исходную систему, исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (см. примеры 1, 2). Получим эквивалентную исходной систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad a_{22}^{*}x_2+\ldots+a_{2n}^{*}x_n=b_2^{*}, \\ \qquad\ldots \\ \qquad a_{m2}^{*}x_2+\ldots+a_{mn}^{*}x_n=b_m^{*}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{*},\ b_i^{*}(i,j=\overline{2,m})$ – новые значения неизвестных и правых частей. Затем, считая $a_{22}^{*}\neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. Продолжая указанный процесс, пока это возможно, мы придем к системе ступенчатого (или треугольного) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^* x_2 \quad + \quad \ldots \quad + a_{2n}^* x_n = b_2^*, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k, \end{cases} \quad (k \le n)$$

где $a_{11} \ne 0$; $a_{22}^* \ne 0$, ..., $c_{kk} \ne 0$.

Если в процессе приведения системы к ступенчатому виду появляется уравнение вида 0 = 0, то его отбрасывают. Если же появляется уравнение вида $0 = b_i$ и $b_i \ne 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Обратный ход метода Гаусса заключается в решении ступенчатой системы. Рассмотрим его сначала для частного случая, когда $k = n$ и ступенчатая система имеет так называемый треугольный вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^* x_2 + \ldots + a_{2n}^* x_n = b_2^*, \\ \qquad\qquad \ldots \\ c_{n-1n}x_{n-1} + \ldots + c_{n-1n}x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases} \quad (k = n)$$

Из последнего уравнения находим x_n, затем, подставляя x_n в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1}. Продолжая этот процесс, найдем единственное решение системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (см. пример 1).

Если в ступенчатой системе $k < n$, то из последнего уравнения системы выражаем x_k через x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение и выражаем x_{k-1} через x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n. Продолжая этот процесс, выразим неизвестные x_1, x_2, …, x_k через x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n, которые называются свободными неизвестными. Придавая свободным неизвестным (x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n) произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы (см. пример 2).

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на –2 и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на –3 и сложим с третьим. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=10, \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+\quad 2x_2+2x_3=3, \\ \qquad -x_2+x_3=4, \\ \qquad x_2-2x_3=-6. \end{cases}$$

Исключим x_2 из третьего уравнения, для чего второе уравнение полученной системы прибавляем к третьему. Получим систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\quad 2x_3=3, & \Rightarrow & x_1=3-2x_2-2x_3=3, \\ \quad -x_2+\quad x_3=4, & \Rightarrow & x_2=x_3-4=-2, \\ \qquad\quad -x_3=-2, & \Rightarrow & x_3=2. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим x_3. Из второго уравнения находим x_2, используя найденные значения x_3, а затем из первого уравнения находим x_1.

Решение системы имеет вид $(3;\ -2;\ 2)$.

Универсальность метода Гаусса заключается в том, что им можно решить систему с нулевым определителем (или установить ее несовместность), а также системы, у которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} 8x+y+5z=13, \\ 4x-y+3z=5, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

По формулам Крамера решить систему нельзя. Применим метод Гаусса, предварительно поменяв местами 1-е и 3-е уравнения системы, что позволит исключать неизвестные, оперируя только целыми числами:

$$\begin{cases} 2x+y+z=4, \\ 4x-y+3z=5, \\ 8x+y+5z=13. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=4, \\ \quad 3y+z=-3, \\ -3y+z=-3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=4, \\ -3y+z=-3, \\ \qquad 0=0. \end{cases}$$

У нас осталось 2 уравнения с тремя неизвестными. Обозначим $z = c$ ($c \in \mathbb{R}$) и перенесем в правую часть системы. Получим:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 - c \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}\left(4 - c - y\right) = \dfrac{1}{2}\left(4 - c - 1 - \dfrac{1}{3}c\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3}c, \\ -3y = -3 - c \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{3}\left(3 + c\right) = 1 + \dfrac{1}{3}c. \end{cases}$$

Система имеет бесчисленное множество решений:

$$x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}c, \quad y = 1 + \frac{1}{3}c, \quad z = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Если бы в третьем уравнении системы вместо верного равенства $0 = 0$ было получено неверное равенство, например, $0 = 2$, то в этом случае система была бы несовместной.

4.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Матрица A имеет размер 2×3. Размер матрицы A^T равен: а) 2×2; б) 3×3; в) 3×2; г) 2×3?

2. Справедливо ли равенство $\det A = \det A^T$?

3. Матрица A имеет размер 2×3, матрица B – 2×2. Существуют ли произведения $A \cdot B$, $B \cdot A$?

4. Можно ли решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера, если: а) определитель системы равен (–5); б) определитель системы равен 0; в) система имеет три уравнения с четырьмя неизвестными?

5. Какая система линейных алгебраических уравнений всегда совместна?

6. Когда однородная система линейных алгебраических уравнений n-го порядка имеет только нулевое решение?

7. Матрица A имеет размер 3×2, E_3 – единична матрица третьего порядка. Произведение $E \cdot A$ а) равно $A \cdot E$; б) не существует; в) равно E; г) равно A?

8. Диагональная матрица 3-го порядка имеет отличные от нуля элементы 2, 3, (–4). Ее определитель равен а) 6; б) –8; в) –12; г) –24; д) другому числу?

9. Определитель матрицы A третьего порядка равен 5. Определитель матрицы $2A$ равен а) 5; б) 10; в) 25; г) 125?

10. Чему равен определитель единичной матрицы а) 2-го порядка; б) 3-го порядка?

11. Сформулируйте алгоритм получения обратной матрицы.

4.1.3. Практический минимум

1. Найти матрицу, транспонированную к матрице A:

а) $A=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$.

2. Даны матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Найти:

а) $2A$; б) $2A+3B-C$; в) $-2C^T$.

3. Найти $3A+2E$, если $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

4. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & -a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \sqrt[3]{a} & a \\ 1 & \sqrt[3]{a^2} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \ln x & \ln y \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Выяснить, для каких матриц существует обратная и найти ее:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

7. Решить уравнения и неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 6 & x+1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} 1-3x & x \\ -2x & 1 \end{vmatrix}=3$; в) $\begin{vmatrix} 5x+3 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\ge 0$; г) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 3x-8 \\ 1 & 2x+3 \end{vmatrix}<0$.

8. Найти решения или установить несовместность систем, дать геометрическую интерпретацию:

а) $\begin{cases} 5x - 3y = 13, \\ 2x + 7y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ -6x + 4y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 6y = 3, \\ 3y - x = -1,5. \end{cases}$

9. Решить системы по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y + z - 2x = 0, \\ 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ -x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$

10. Решить системы методом Гаусса или доказать несовместность систем:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 2y + z = 11, \\ 2x + y - 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 2y - 3z = -1, \\ 2x + 3y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 3x + 4y - z = 7, \\ 7x + 10y - 5z = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Минимум для аудиторной работы

1. а), в); 2. б), в); 3; 4. а), б), в); 5. а), в), г); 6. а), г); 7. а), в); 8. а), б), в); 9. а), в), д), е); 10. а), б), г), д), е).

4.1.4. Ответы

1. а) $A^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -7 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; в) $A^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

2. б) $2A + 3B - C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 33 & -3 \end{bmatrix}$. **3.** $3A + 2E = \begin{bmatrix} 8 & 15 & -12 \\ -3 & -7 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. **4.** а) 13; б) $-2a^2$; в) $\sin 2x$; г) 0; д) $\ln(x^5 y^2)$. **5.** а) 100; б) 30; в) 78; г) 0; д) 1. **6.** а) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; г) нет.

7. а) $x = -3$; б) $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$; в) $[1,2; +\infty)$; г) (–0,25; 1). **8.** а) (2; –1) – точка пересечения двух прямых; б) решений нет, прямые параллельны; в) бесчисленное множество решений: $y = c$, $x = 3c + 1,5$, $c \in \mathbb{R}$; прямые совпадают. **9.** а) (–2; 3; 5); б) (4; 5; –3); в) метод не применим; г) (1; 3; –3); д) (2; 1; 3); е) (0; 0; 0). **10.** а) (2; –1; 3); б) (3; –1; 1); в) (–2; 1; –3); г) несовместна; д) $(-1,3c;\ 0,9c;\ c)$, $c \in \mathbb{R}$; е) $(-12 + 6,5c;\ 6 - 3,5c;\ 5 - 3c;\ c)$, $c \in \mathbb{R}$; ж) $(1; 0; 2)$; з) $(c - 1;\ 2 - c;\ c)$, $c \in \mathbb{R}$.

4.2. ВЕКТОРЫ

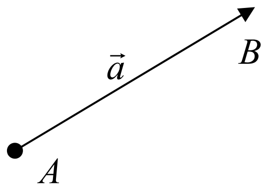
4.2.1. Теоретический минимум

1. Понятие вектора.
2. Линейные операции над векторами.
3. Векторный базис, координаты вектора.
4. Скалярное произведение двух векторов.
5. Векторное произведение двух векторов.
6. Смешанное произведение трех векторов.
7. Пространство $\mathbb{R}^n$.

Понятие вектора

Под ***вектором*** на плоскости или в пространстве будем понимать направленный отрезок, который можно переносить параллельно самому себе (свободный вектор).

При обозначении вектора направление обычно подчеркивается стрелкой: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ (если вектор задается началом A и концом B); длина вектора называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.



Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором или ортом, а длина которого равна нулю – ***нулевым*** или нуль-вектором (обозначается $\vec{0}$, направление его произвольно).

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются ***коллинеарными*** и обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***равными***, если их модули и направления совпадают.

Два коллинеарных вектора называются ***противоположными***, если их модули равны, а направления противоположны. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $(-\vec{a})$.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются ***компланарными***.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$.

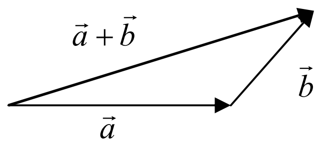
Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ можно построить по правилу треугольника или параллелограмма.

Чтобы сложить несколько векторов, нужно перенести их параллельно самим себе так, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, представляет сумму слагаемых векторов (правило замыкания ломаной).

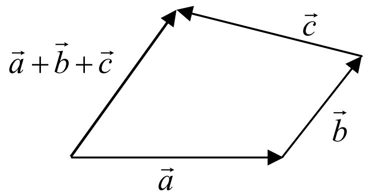
Разностью векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ – вектор, противоположный $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}-\vec{b}$ можно построить по правилу параллелограмма.

Правило треугольника



Правило замыкания ломаной



Правило параллелограмма

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, модуль $|\vec{b}|$ которого равен $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Отсюда – условие коллинеарности двух векторов:

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}\ \text{или}\ \vec{a}=\lambda\vec{b}.}$$

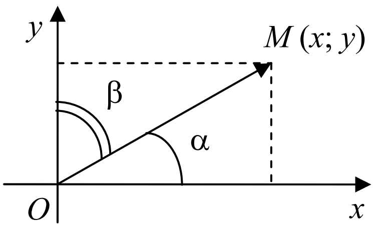
Основные свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.	6. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.	7. $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.
3. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.	8. $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.
4. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\vec{a}$.	9. $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$.
5. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$.	10. Если $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, то $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$.

Векторный базис, координаты вектора

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и $\vec{a}$ – произвольный вектор, лежащий в этой плоскости.

Переместим $\vec{a}$, сохраняя его длину и направление так, чтобы его начало совпало с началом координат. Получим вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.



Обозначим через $(x; y)$ координаты точки M, через α и β – углы, которые образует вектор $\overrightarrow{OM}$ с положительными направлениями осей Ox и Oy; $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\overrightarrow{OM}$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, равное произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью; обозначается $пр_l\vec{a}$.

Тогда $пр_{Ox}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha = x$, $пр_{Oy}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta = y$.

Координатами вектора на плоскости Oxy называются его проекции на координатные оси.

Следовательно, x и y – координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Записывают $\overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют радиус-вектором точки M. Точка и ее радиус-вектор имеют одинаковые координаты. Из $\triangle OMP$ получаем: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

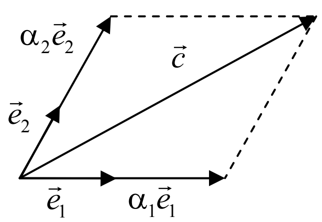
Исходный вектор $\vec{a}$ имеет ту же длину, образует такие же углы с осями координат, что и $\overrightarrow{OM}$, поэтому вектор $\vec{a}$ имеет такие же координаты: $\vec{a} = \{x; y\}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, то имеем:

$\cos\alpha = \dfrac{x}{\lvert\vec{a}\rvert} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\lvert\vec{a}\rvert} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{x; y\}$.

Вектор $\vec{e}_a = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$ является единичным вектором направления вектора $\vec{a}$.

Базис на плоскости – это два произвольных неколлинеарных вектора на этой плоскости.

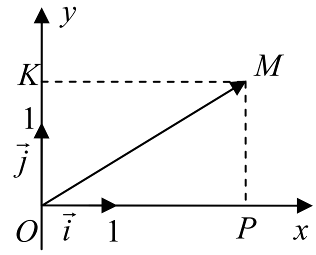


Пусть векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис на плоскости. Тогда произвольный вектор $\vec{c}$ этой плоскости может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (разложен по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$):

$$\boxed{\vec{c} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2.}$$

Здесь α_1 и α_2 – координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

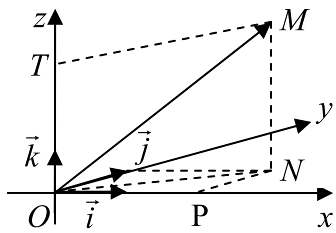
Единичные векторы $\vec{i} = \{1; 0\}$ и $\vec{j} = \{0; 1\}$ образуют базис на плоскости Oxy, их называют декартовыми ортами на плоскости. Так как $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OK} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то $\{x; y\}$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$.



Аналогично пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и точка $M(x; y; z)$.

Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Введем базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ – декартовы орты на осях Ox, Oy, Oz соответственно. Для радиус-вектора точки M имеет место разложение $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Следовательно, $\{x; y; z\}$ – координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



В дальнейшем для удобства координаты вектора $\vec{a}$ будем обозначать $\{x_a; y_a; z_a\}$. Пусть α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда имеют место формулы

$$x_a = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y_a = |\vec{a}|\cos\beta,\ z_a = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2},\ \vec{e}_a = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

В дальнейшем будем считать, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ заданы своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$. Тогда

$$\vec{a}+\vec{b}=\{x_a+x_b;\ y_a+y_b;\ z_a+z_b\}.$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b\}.$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a\}.$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}.$$

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow x_a=x_b,\ y_a=y_b,\ z_a=z_b.$$

Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то для каждого вектора $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_A;y_A;z_A)$ и концом в точке $B(x_B;y_B;z_B)$ его координаты равны $x_d=x_B-x_A$; $y_d=y_B-y_A$; $z_d=z_B-z_A$.

Пример 1. Даны точки $A(1;\ 4;\ 6)$ и $B(2;\ 6;\ 4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину, направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Находим координаты: $\overrightarrow{AB}=\{2-1;\ 6-4;\ 4-6\}=$ $=\{1;\ 2;\ -2\}$.

Модуль (длина) вектора $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=-\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}=\{2;\ 1;\ 3\}$ и $\vec{b}=\{-1;\ 0;\ 2\}$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a}=\{4;\ 2;\ 6\}$, $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=\{4-(-1);\ 2-0;\ 6-2\}=\{5;\ 2;\ 4\}$.

Находим длину вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}|=\sqrt{5^2+2^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Пример 3. При каких α и β вектор $\vec{a}=\{3;\ \alpha;\ \beta\}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(4;\ 0;\ 3)$, $B(-2;\ 4;\ 5)$?

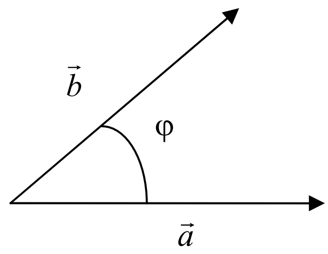
Решение. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=\{-2-4;\ 4-0;\ 5-3\}=\{-6;\ 4;\ 2\}$.

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеет вид

$\dfrac{3}{-6}=\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{\beta}{2}$, следовательно, $-6\alpha=12$, $-6\beta=6$ и $\alpha=-2$, $\beta=-1$.

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число*** (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=\varphi$ между ними:



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}.}$$

Если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат координатами $\vec{a}=\{x_a;y_a;z_a\}$, $\vec{b}=\{x_b;y_b;z_b\}$, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b.}$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,пр_{\vec{b}}\vec{a}.$

Некоторые приложения скалярного произведения:

1) условие ортогональности (перпендикулярности) ненулевых векторов:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_ax_b+y_ay_b+z_az_b=0;$$

2) косинус угла между двумя ненулевыми векторами равен:

$$\cos\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}};$$

3) работа A постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\vec{s}$ равна $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$ (физический смысл скалярного произведения).

Пример 1. Две силы $\vec{F}_1=\{4;1;3\}$ и $\vec{F}_2=\{3;-1;2\}$ приложены в точке $M(1;4;7)$. Вычислить работу их равнодействующей $\vec{R}$ по перемещению материальной точки из M в $N(3;8;5)$.

Решение. Найдем координаты равнодействующей сил $\vec{R}$ и вектора перемещения $\vec{s}=\overrightarrow{MN}$:

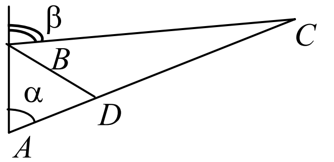
$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{4+3;\, 1-1;\, 3+2\} = \{7;\, 0;\, 5\}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{MN} = \{3-1;\, 8-4;\, 5-7\} = \{2;\, 4;\, -2\}$.

Тогда работа равна

$A = \vec{R}\cdot\vec{s} = 7\cdot 2 + 0\cdot 4 + 5\cdot(-2) = 14 - 10 = 4$.

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;\,-2;\,-1)$, $B(5;\,2;\,-3)$, $C(4;\,-2;\,3)$.



Найти: а) длину стороны AB; б) проекцию стороны AB на AC, т. е. AD; в) внутренний угол при вершине A; г) внешний угол при вершине B.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{4;4;-2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3;0;4\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-1;-4;6\}$:

а) длина стороны AB равна

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$;

б) находя длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$, получаем:

$$np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{4\cdot 3 + 4\cdot 0 - 2\cdot 4}{5} = \frac{12-8}{5} = 0{,}8;$$

в) для угла $\alpha = \overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}$ имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{4}{6\cdot 5} = \frac{2}{15},\ \alpha = \arccos\frac{2}{15};$$

г) для угла $\beta = \overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}$ имеем:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{4\cdot(-1) + 4\cdot(-4) - 2\cdot 6}{6\cdot\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{-32}{6\cdot\sqrt{53}},\ \beta = \pi - \arccos\left(\frac{16}{3\sqrt{53}}\right).$$

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{4;\, 2;\, -6\}$ на ось l, образующую с осью Ox угол $\alpha = 120°$, с осью Oy – угол $\beta = 45°$ и тупой угол с осью Oz.

Решение. Введем вектор $\vec{e}_l = \{\cos\alpha;\, \cos\beta;\, \cos\gamma\}$ – единичный вектор направления l.

Из условия $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ находим $\cos\gamma$:

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ т. е. } \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

Так как γ – тупой угол, нужно взять $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\vec{e}_l = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

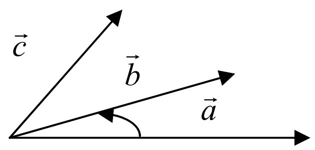
Находим проекцию:

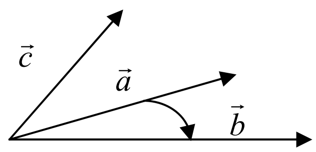
$$np_l\vec{a} = np_{\vec{e}_l}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_l}{|\vec{e}_l|} = \vec{a}\cdot\vec{e}_l = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{2} + 3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Векторное произведение двух векторов

Три некомпланарных, упорядоченных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенные к общему началу, называют ***правой*** тройкой векторов, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ против хода часовой стрелки.

Если же этот поворот виден по ходу часовой стрелки, то тройка векторов называется ***левой***.





Декартов базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образует правую тройку.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется ***вектор*** $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, обладающий свойствами:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;

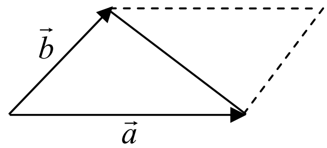
2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$.

Свойства векторного произведения

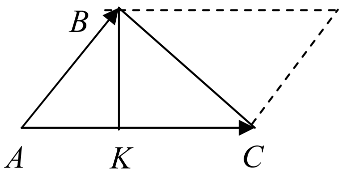
1. Если $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}.$$

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
4. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ при $\lvert\vec{a}\rvert \neq 0, \lvert\vec{b}\rvert \neq 0$.
5. Площади параллелограмма и треугольника $S_{\square} = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$ $\quad S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$. 

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти его площадь и высоту BK.

Решение.



Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е. $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и их векторное произведение:

$\overrightarrow{AB} = \{4; -5; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0; 4; -3\}$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Следовательно, $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\sqrt{225 + 144 + 256} = \frac{1}{2}\sqrt{625} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$ (ед^2.).

С другой стороны, $S_{\triangle} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$, отсюда

$$BK = \frac{2 \cdot S_{\triangle}}{AC} = \frac{12{,}5 \cdot 2}{\sqrt{0 + 16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5 \text{ (лин. ед.)}.$$

Пример 2. Найти единичный вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{4; 1; 3\}$ и $\vec{b} = \{4; 0; 2\}$.

Решение. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ будет перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем его:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \{2; 4; -4\}.$$

Модуль вектора $\vec{c}$ равен $|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$.

Следовательно, единичные векторы, перпендикулярные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будут иметь вид

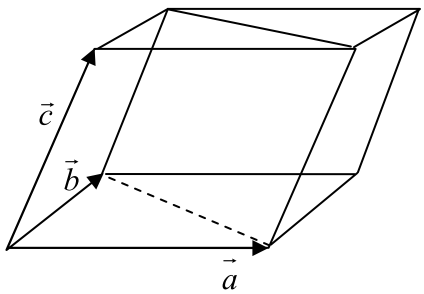
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{6}\vec{c} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}, \quad \vec{e}_2 = -\frac{1}{6}\vec{c} = \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

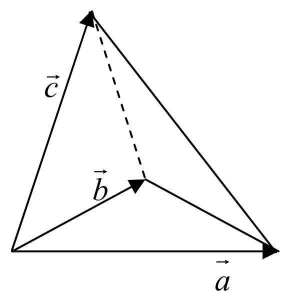
Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и вектора $\vec{c}$.

По определению $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

<table>
<tr><td colspan="2">1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Если $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, $\vec{c} = \{x_c; y_c; z_c\}$, то
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = x_a \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}.$$</td></tr>
<tr><td>3. Объем параллелепипеда, треугольной призмы


$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $\quad V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.</td><td>4. Объем пирамиды


$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.</td></tr>
</table>

Пример 1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{-5; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{-6; 3; 4\}$, $\vec{c} = \{-8; 6; -5\}$.

Решение. Объем параллелепипеда равен $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ -8 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -5\cdot(-15-24) - 3\cdot(30+32) + 2\cdot(-36+24) = -15.$$

Следовательно, $V = |-15| = 15$ (куб. ед.).

Пример 2. Доказать, что точки $A(1;\, 2;\, -1), B(0;\, 1;\, 5), C(-1;\, 2;\, 1)$, $D(2;\, 1;\, 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, т. е. если смешанное произведение $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = 0$. Найдем координаты этих векторов и их смешанное произведение:

$\overrightarrow{AB} = \{-1;\, -1;\, 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2;\, 0;\, 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1;\, -1;\, 4\}$,

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(0+2) + 1\cdot(-8-2) + 6\cdot(2-0) = 0.$$

Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Множество векторов на плоскости и в пространстве, заданных своими координатами, с линейными операциями покоординатного сложения и умножения на числа допускает естественное обобщение на случай n координат, когда векторы рассматриваются как элементы n-мерного (числового) пространства $\mathbb{R}^n$. Обычно пространство $\mathbb{R}^n$ отождествляется с множеством матриц-столбцов размера $n\times 1$ со стандартными операциями сложения матриц и умножения их на числа: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

4.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дан $\triangle ABC$. Чему равна сумма $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$?

2. Какие из векторов $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $(-3\vec{a})$ имеют а) одинаковое; б) противоположное направление?

3. Дано $\vec{b} = 4\vec{a}$. Как выразится $|\vec{b}|$ через $|\vec{a}|$?

4. Дано $|\vec{a}| = 3$. Как выразится через $\vec{a}$ единичный вектор а) имеющий то же направление, что и $\vec{a}$; б) имеющий направление, противоположное $\vec{a}$?

5. Какому условию удовлетворяют координаты коллинеарных векторов?

6. Когда проекция ненулевого вектора на ось равна нулю?

7. Когда скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю?

8. Какие углы (острые или тупые) образует вектор $\vec{a}=\{-4;\,3;\,2\}$ с координатными осями? Чему равна $np_{Ox}\vec{a}$?

9. Как найти площадь треугольника, построенного на заданных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

10. Как найти объем параллелепипеда, построенного на трех заданных векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

11. Будет ли справедливым равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, если $A(2;\,-1;\,4),\,B(0;\,5;\,9),\,C(-1;\,0;\,-2),\,D(-3;\,6;\,3)$?

12. Как определяется пространство $\mathbb{R}^n$?

4.2.3. Практический минимум

1. Даны векторы с координатами $\vec{a}=\{1;\,-3;\,5\}$, $\vec{b}=\{2;\,0;\,-1\}$, $\vec{c}=\{-4;\,6;\,-2\}$. Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ и проекции $np_{Oy}\vec{a},\,np_{Ox}\vec{b}$.

2. Найти координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2;\,4;\,-3),\,B(5;\,0;\,9)$.

3. Даны координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{4;\,-5;\,7\}$ и координаты точки $A(2;\,1;\,-8)$. Найти координаты точки B и проекцию $\overrightarrow{AB}$ на ось Oz.

4. Найти значения α и β, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, если $\vec{a}=\{-3;\,\alpha;\,2\}$, $\vec{c}=\{\beta;\,12;\,-6\}$. Установить, будут ли эти векторы иметь одинаковое направление.

5. Найти значение λ, при котором $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\vec{a}=\{3;\,-4;\,5\}$, $\vec{b}=\{\lambda;\,1;\,-4\}$.

6. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Найти значение λ, при котором $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}-\lambda\vec{b})$.

7. Найти единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если $\vec{e}_1$ имеет то же направление, что $\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$ и $A(5;\,-3;\,4)$, $B(-7;\,1;\,1)$.

8. Даны векторы $\vec{a}=\{-4;\, 2;\, 4\}$ и $\vec{b}=\{0;\,-3;\, 4\}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и косинус угла $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ между ними.

9. Даны вершины четырехугольника $A(1;\, 4;\, 0)$, $B(-4;\, 1;\, 1)$, $C(-5;\,-5;\, 3)$, $D(1;\,-2;\, 2)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

10. Даны координаты вершин треугольника $A(1;\, 2;\, 4)$, $B(-3;\, 2;\, 1)$, $C(4;\, 2;\, 0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C.

11. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{2;\,-4;\, 4\}$ на ось l, составляющую с $\vec{a}$ угол $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

12. Даны векторы $\vec{a}=\{1;\, 2;\,-2\}$, $\vec{b}=\{-5;\, 0;\, 1\}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}$. Найти $np_{\vec{c}}(2\vec{a}-\vec{b})$, направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

13. Даны векторы $\vec{a}=\{4;\,-5;\, 3\}$ и $\vec{b}=\{-4;\, 0;\, 2\}$. Проверить, что $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ и найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

14. Даны вершины треугольника ABC $A(-1;\, 3;\, 1)$, $B(2;\,-1;\, 1)$, $C(2;\,-6;\, 5)$. Найти его площадь и высоту, опущенную на сторону AB.

15. Даны векторы $\vec{a}=\{2;\,-4;\,-5\}$, $\vec{b}=\{-4;\, 1;\, 6\}$, $\vec{c}=\{5;\,-5;\,-1\}$. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

16. Проверить компланарность векторов $\vec{a}=\{3;\,-4;\, 7\}$, $\vec{b}=\{1;\, 2;\,-3\}$, $\vec{c}=\{2;\,-1;\, 2\}$.

17. Доказать, что точки $A(1;\, 2;\, 0)$, $B(4;\, 3;\, 4)$, $C(2;\,-3;\,-2)$, $D(3;\, 0;\, 1)$ лежат в одной плоскости.

18. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{m}=\{5;\, 2;\,-6\}$, $\vec{n}=\{0;\, 6;\,-8\}$, $\vec{p}=\{-2;\, 4;\,-6\}$.

19. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A_1(1;\, 6;\, 2)$, $A_2(5;\, 0;6)$, $A_3(5;\, 5;\, 4)$, $S(4;\, 8;\, 9)$.

20. Найти высоту треугольной призмы, вершины которой находятся в точках $A_1(1;\, 1;\, 1)$, $A_2(2;\, 0;\, 2)$, $A_3(2;\, 2;\, 2)$, $B_1(3;\, 4;\,-3)$.

Минимум для аудиторной работы

1; 2; 4; 5; 7; 10; 11; 12; 13; 14; 16; 19; 20.

4.2.4. Ответы

1. $2\vec{a}=\{2;-6;10\}$, $-3\vec{b}=\{-6;0;3\}$, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=\{-8;0;11\}$; $np_{Oy}\vec{a}=-3$, $np_{Ox}\vec{b}=2$. **2.** $\overrightarrow{AB}=\{3;-4;12\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=13$. **3.** $B(6;-4;-1), np_{Oz}\overrightarrow{AB}=7$. **4.** $\alpha=-4, \beta=9, \vec{c}=-3\vec{a}$, т. е. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$. **5.** $\lambda=8$. **6.** $\lambda=\pm 0,6$. **7.** $\vec{e}_1=\left\{-\frac{12}{13};\frac{4}{13};-\frac{3}{13}\right\}, \vec{e}_2=\left\{\frac{12}{13};-\frac{4}{13};\frac{3}{13}\right\}$. **8.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=10, \cos\varphi=\frac{1}{3}$. **10.** $\alpha=90°, \gamma=135°$. **11.** $-3\sqrt{3}$. **12.** $np_{Oy}(2\vec{a}-\vec{b})=7,4$; $\cos\alpha=\frac{1}{3}, \cos\beta=\frac{2}{3}, \cos\gamma=-\frac{2}{3}$. **13.** $S=30$. **14.** $S=12,5; H=5$. **15.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-121, \vec{a}\vec{c}\vec{b}=121$. **18.** $V=60$. **19.** $V=22$. **20.** $H=3\sqrt{2}$.

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

1. Прямая на плоскости.
2. Кривые второго порядка.
3. Плоскость в пространстве.
4. Прямая в пространстве.

Прямая на плоскости

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy, то уравнение первой степени относительно x и y

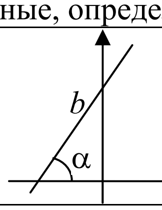
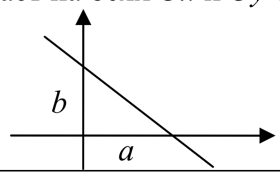
$$Ax + By + C = 0, \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$$

является уравнением прямой, лежащей в плоскости Oxy. Это уравнение называется ***общим уравнением прямой***.

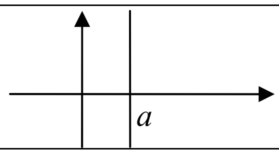
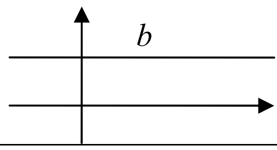
И наоборот, всякая прямая в плоскости Oxy определяется уравнением первой степени относительно x и y. В зависимости от особенностей (используемой информации) расположения прямой эти уравнения записываются в разной форме. Их вид и характеристика приведены ниже в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Виды уравнений прямой на плоскости

Данные, определяющие прямую	Уравнение прямой
 $k = \mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой	$y = kx + b$
Прямая с угловым коэффициентом проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$	$y - y_0 = k(x - x_0)$
Прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
Прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b 	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Окончание табл. 5.1

Данные, определяющие прямую	Уравнение прямой
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, $k = -\dfrac{A}{B}$, $\vec{n} = (A;\ B)$ – нормальный вектор прямой
Прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(a;\ 0)$ 	$x = a$
Прямая параллельна оси Ox и проходит через точку $(0;\ b)$ 	$y = b$

Рассмотрим прямые l_1 и l_2, которые заданы уравнениями:

$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\qquad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

или $l_1: y = k_1x + b_1$, $\qquad l_2: y = k_2x + b_2$.

Взаимное расположение прямых представлено в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2 на плоскости

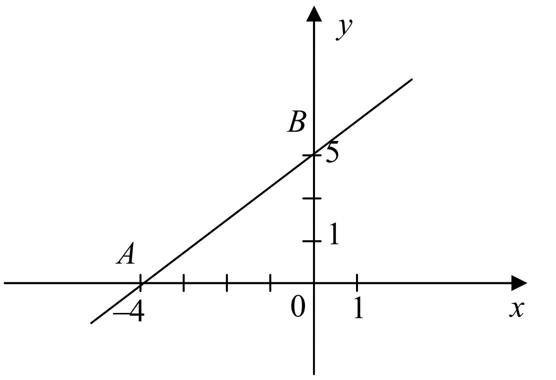
Расположение	Условия
Прямые l_1 и l_2 совпадают	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
Прямые параллельны: $l_1 \parallel l_2$	$k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$
Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны: $l_1 \perp l_2$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ под углом φ, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$	$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0, \end{cases}$ $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right\rvert$
Расстояние $d = d(M_0;\ l)$ от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$	$d = d(M_0;\ l) = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

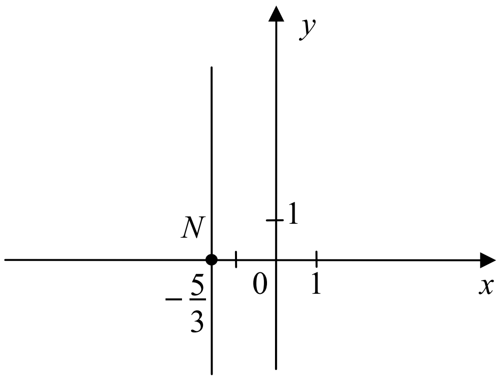
Пример 1. Построить прямые, описываемые уравнениями:
1) $5x-4y+20=0$; 2) $3x+5=0$.

Решение.

1) для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек. Удобно брать точки пересечения прямой с осями координат. Пусть A − точка пересечения прямой $5x-4y+20=0$ с осью Ox, а B – с осью Oy, тогда $y_A=0$, $x_B=0$. Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой $5x-4y+20=0$. Поэтому при $y_A=0$ получаем $5x_A+20=0$, $x_A=-4$, т. е. $A(-4;\,0)$, при $x_B=0$, $-4y_B+20=0$, $y_B=5$, т. е. $B(0;\,5)$. Отмечаем точки A и B и проводим через них прямую;

2) преобразуем уравнение $3x+5=0$ к виду $x=-\dfrac{5}{3}$. Это уравнение прямой, проходящей через точку $N\left(-\dfrac{5}{3};\,0\right)$ параллельно оси Oy.





Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;\,4)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha=135°$.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $k=\mathrm{tg}\alpha=$ $=\mathrm{tg}135°=-1$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, получаем искомое уравнение прямой: $y-4=-1\cdot(x-3)$, или $y=-x+7$, или $x+y-7=0$ − общее уравнение прямой.

Пример 3. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $5x-y-3=0$ и $3x+2y-7=0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Пусть φ − острый угол между прямыми, тогда $\mathrm{tg}\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, где k_1 и k_2 − угловые коэффициенты прямых.

Из уравнений прямых найдем k_1 и k_2: $y=5x-3$, т. е. $k_1=5$; $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$, т. е. $k_2=-\frac{3}{2}$. Тогда $\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{-\frac{3}{2}-5}{1-\frac{3}{2}\cdot 5}\right|=1$, т. е. $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Чтобы найти точку пересечения прямых, составим систему:

$$\begin{cases} 5x-y-3=0, \\ 3x+2y-7=0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и сложив со вторым, получаем $13x-13=0$, т. е. $x=1$. Из первого уравнения находим $y=5x-3=2$. Прямые пересекаются в точке $(1;\,2)$.

Пример 4. Даны три вершины трапеции $ABCD$: $A(4;\,-1)$, $B(-6;\,-3)$, $C(2;\,3)$. Найти: а) уравнения оснований BC и AD; б) уравнение высоты BM, проведенной к AD; в) длину высоты BM.

Решение.

а) найдем уравнение BC. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Здесь $(x_1;\,y_1)$ – координаты точки B, $(x_2;\,y_2)$ – точки C. Получим $\frac{x+6}{2+6}=\frac{y+3}{3+3}$, $6(x+6)=8(y+3), 3x+18=4y+12$, т. е. уравнение BC: $3x-4y+6=0$, или $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$.

Угловой коэффициент BC равен $k_{BC}=\frac{3}{4}$. Основание AD параллельно BC, поэтому угловой коэффициент AD также равен $\frac{3}{4}$. Воспользуемся уравнением $y-y_0=k(x-x_0)$. Здесь $(x_0;\,y_0)$ – координаты точки A, $k=k_{AD}=\frac{3}{4}$. Получим $y+1=\frac{3}{4}(x-4)$, или $3x-4y-16=0$;

б) высота BM перпендикулярна AD. Следовательно, $k_{BM}=-\frac{1}{k_{AD}}=-\frac{4}{3}$, а уравнение BM будет иметь вид

$$y+3=-\frac{4}{3}(x+6), \text{ или } 3y+9=-4x-24, \text{ или } 4x+3y+33=0;$$

в) найдем длину высоты BM по формуле расстояния от точки до прямой. Прямая AD задана уравнением $3x - 4y - 16 = 0$, точка B имеет координаты $(-6; -3)$. Получаем:

$$BM = \frac{|3\cdot(-6) - 4\cdot(-3) - 16|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{22}{5} = 4{,}4.$$

Кривые второго порядка

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy. Линии на плоскости, определяемые алгебраическими уравнениями второго порядка относительно переменных x и y, т. е. уравнениями вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,\ \ (A^2 + B^2 \neq 0)$$

называются ***линиями (кривыми) второго порядка***.

Линиями второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола, парабола. В настоящем параграфе рассматриваются уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N(a; b)$ (центра) на одно и тоже расстояние R (радиус).

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами).

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой ***фокусом*** F, и данной прямой, называемой ***директрисой*** l.

Канонический вид уравнения эллипса, гиперболы и параболы принимают в канонической системе координат, которая строится следующим образом:

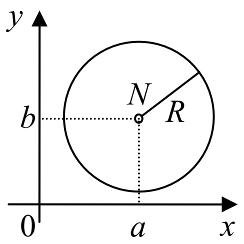
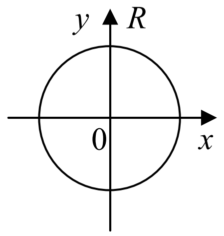
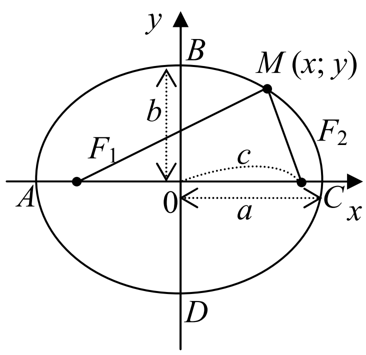
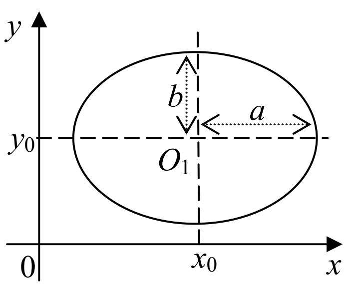
а) для эллипса и гиперболы: ось абсцисс Ox проводится через фокусы с направлением от одного фокуса F_1 к другому, ось ординат Oy – через середину отрезка F_1F_2 с направлением вверх (если F_1 – слева, а F_2 – справа);

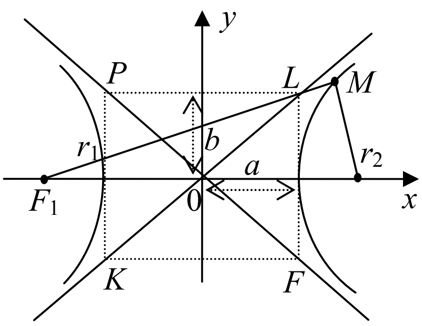
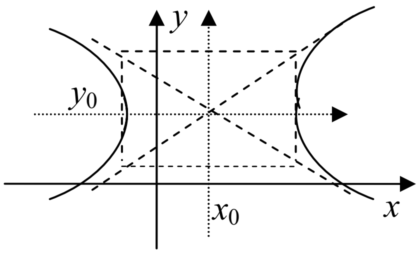
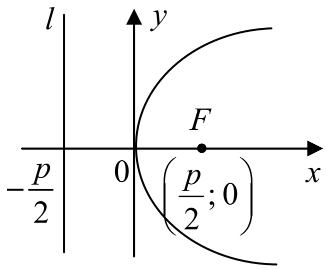
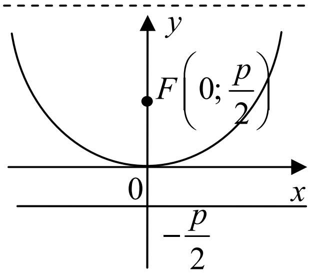
б) для параболы: ось Ox – через фокус F перпендикулярно директрисе с направлением от директрисы к фокусу, ось Oy – через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису перпендикулярно Ox с направлением вверх (если директриса слева, а фокус – справа от оси Oy).

Кривые второго порядка представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Кривые второго порядка

Название	Вид кривой	Аналитическое представление
Окружность		$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ $N\,(a;\,b)$ – центр, R – радиус
		$x^2+y^2=R^2$ $O\,(0;\,0)$ – центр, R – радиус
Эллипс		Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>0,\ b>0)$, a – **большая**, b – **малая полуоси** эллипса; $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$, $(0;\ b)$, $(0;\ -b)$ – вершины эллипса; $c^2=a^2-b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{a},\ (\varepsilon<1)$ – **эксцентриситет** эллипса
		$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, и центром симметрии $O_1(x_0;\,y_0)$

<table>
<tr><th>Название</th><th>Вид кривой</th><th>Аналитическое представление</th></tr>
<tr><td>Гипербола</td><td>
</td><td>Каноническое уравнение:
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,
a – действительная, b – мнимая полуоси; (a; 0), (–a; 0) – вершины гиперболы;
$c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $(\varepsilon>1)$ – эксцентриситет гиперболы</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным осям</td></tr>
<tr><td>Парабола</td><td>
</td><td>Каноническое уравнение:
$y^2=2px$,
$p>0$ – расстояние от фокуса до директрисы – параметр параболы. Вершина параболы – точка $O(0;0)$, ось Ox – ось симметрии. Уравнение директрисы l параболы: $x=-\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Oy, имеет уравнение $x^2=2py$</td></tr>
</table>

Пример 1. Найти координаты центра и радиус окружности: $x^2+y^2-6x+4y-3=0$.

Решение. Приведем уравнение $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, выделяя полные квадраты в левой его части: $(x^2-6x+9)-9+(y^2+4y+4)-4-3=0$, или $(x-3)^2+(y+2)^2=16$. Значит, центр окружности – точка $N(3;-2)$, радиус $R=4$.

Пример 2. Дано уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) длину его осей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$ к каноническому виду, разделив обе части его на 225:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, из которого следует:

а) $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, т. е. $a = 5$, $b = 3$, $2a = 10$ − длина большой оси, $2b = 6$ − длина малой оси;

б) используя равенство $c^2 = a^2 - b^2$, найдем $c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$, значит, $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$;

в) эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Пример 3. Дано уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти: а) длины полуосей гиперболы; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 144. Получим каноническое уравнение $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, из которого следует:

а) $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, т. е. $a = 4$, $b = 3$;

б) используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, найдем $c = \sqrt{16+9} = 5$, значит, фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$;

в) эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$;

г) уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$, т. е. в данном случае $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Плоскость в пространстве

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$$

определяет плоскость в пространстве и называется ***общим уравнением плоскости***. Вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ будет перпендикулярен этой плоскости. Он называется ***вектором нормали (нормалью)*** к плоскости.

В табл. 5.4. приведены характерные случаи расположения плоскости в зависимости от значений коэффициентов A, B, C, D.

Таблица 5.4

Расположение плоскости в зависимости от значений коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*

Расположение плоскости	Ее уравнение
Плоскость проходит через начало координат (0; 0; 0)	$D = 0$: $Ax + By + Cz = 0$
Плоскость параллельна Ox $\vec{n} \perp Ox \Rightarrow A = 0$	$A = 0$: $By + Cz + D = 0$
Плоскость проходит через Ox	$A = 0$, $D = 0$: $By + Cz = 0$
Плоскость параллельна осям Oy и Oy	$A = 0$, $B = 0$: $Cz + D = 0$
Координатная плоскость Oxy	$A = 0$, $B = 0$, $D = 0$: $z = 0$
Координатная плоскость Oyz	$x = 0$
Координатная плоскость Oxz	$y = 0$

Кроме общего уравнения, плоскость может быть задана и другими уравнениями. Они приведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Уравнения плоскости в пространстве

Данные, определяющие плоскость	Уравнение плоскости
Три точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \in Q$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2) \in Q$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3) \in Q$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
Точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in Q$ и вектор $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\} \perp Q$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Плоскость Q отсекает отрезки a, b, c на осях Ox, Oy и Oz соответственно	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

Пусть две плоскости Q_1 и Q_2 заданы общими уравнениями:

$$Q_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad Q_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$Q_1 \perp \vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}; \qquad Q_2 \perp \vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

Рассмотрим их взаимное расположение (табл. 5.6).

Таблица 5.6

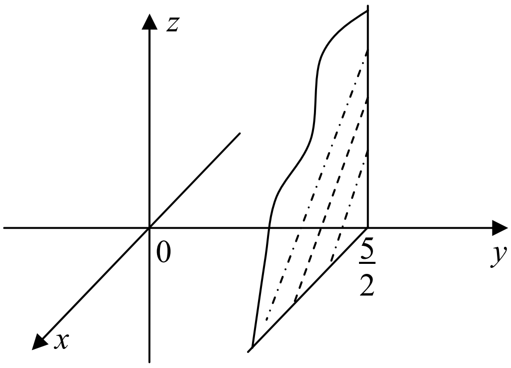
Взаимное расположение плоскостей Q_1 и Q_2 в пространстве

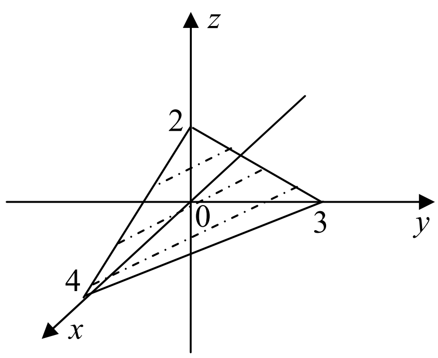
Расположение	Условия
Плоскости Q_1 и Q_2 параллельны $Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны $Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Плоскости Q_1 и Q_2 пересекаются под углом φ	$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$
Расстояние d от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости Q: $Ax + By + Cz + D = 0$	$d = d(M_0;\, Q) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Пример 1. Построить плоскости, заданные уравнениями: а) $2y - 5 = 0$; б) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Решение.

а) плоскость $2y - 5 = 0$ $\left(y = \frac{5}{2}\right)$, $\vec{n} = \{0;\, 2;\, 0\}$ параллельна плоскости Ox и отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{2}$;





б) плоскость $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ $(3x + 4y + 6z = 12)$ или в отрезках $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. Следовательно, плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки длиной 4, 3, 2.

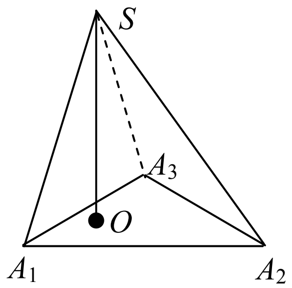
Пример 2. Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку $M(5;\,4;\,-2)$ перпендикулярно прямой MN, если $N(2;\,-1;\,3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $(x_0;\,y_0;\,z_0)$ – координаты точки M. Вектор нормали $\vec{n}=\{A;\,B;\,C\}$ перпендикулярен плоскости Q. Таким вектором является $\overrightarrow{MN}=\{2-5;\,-1-4;\,3+2\}=$ $=\{-3;\,-5;\,5\}$, т. е. уравнение плоскости Q имеет вид $-3(x-5)-5(y-4)+5(z+2)=0$, или $3x+5y-5z-45=0$.

Пример 3. Даны вершины треугольной пирамиды $A_1(1;\,3;\,0)$, $A_2(-3;\,3;\,1)$, $A_3(5;\,0;\,-2)$ и $S(10;\,-7;\,2)$. Найти уравнение плоскости основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты SO.

Решение.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки. Получим:



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ -3-1 & 3-3 & 1-0 \\ 5-1 & 0-3 & -2-0 \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$3(x-1)-4(y-3)+12z=0,$

$3x-4y+12z+9=0.$

Итак, уравнение плоскости основания $A_1A_2A_3$ имеет вид $3x-4y+12z+9=0$. Найдем высоту SO по формуле расстояния от точки до плоскости. Точка – S, плоскость – $A_1A_2A_3$. Получим:

$$SO=\frac{|3\cdot 10-4\cdot(-7)+12\cdot 2+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=\frac{91}{13}=7.$$

Прямая в пространстве

В табл. 5.7 приведены различные виды уравнения прямой l в пространстве в зависимости от данных, однозначно определяющих эту прямую.

Таблица 5.7

Виды уравнения прямой *l* в пространстве

Данные, определяющие прямую	Уравнения прямой l
Две пересекающиеся плоскости	$l\colon \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – прямая как пересечение двух плоскостей
Точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1) \in l$ и вектор $\vec{s} = \{m;\, n;\, p\} \parallel l$ – направляющий вектор прямой	$l\colon\ \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ – каноническое уравнение прямой
Точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1) \in l$ и направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m;\, n;\, p\} \parallel l$	$l\colon \begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой, $t \in R$
Две точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1) \in l$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2) \in l$	$l\colon\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнение прямой по двум заданным точкам

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1\colon\quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad l_2\colon\quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

$$l_1 \parallel \vec{s}_1 = \{m_1;\, n_1;\, p_1\}; \qquad l_2 \parallel \vec{s}_2 = \{m_2;\, n_2;\, p_2\}.$$

Рассмотрим их взаимное расположение (табл. 5.8).

Таблица 5.8

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2 в пространстве

Расположение	Условия
Прямые параллельны (или совпадают)	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow\ \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
Прямые перпендикулярны	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow\ m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
Расположены под углом φ $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\varphi = \vec{s}_1 \hat{\ } \vec{s}_2$	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rvert}{\lvert \vec{s}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{s}_2 \rvert}$

Отметим, что в последних двух случаях часто дополнительно требуется, чтобы прямые l_1 и l_2 лежали в одной плоскости.

Пусть заданы плоскость Q общим уравнением и прямая l каноническим уравнением:

$$Q: \ Ax + By + Cz + D = 0, \qquad l: \ \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

$$\vec{n} = \{A; B; C\} \perp Q; \qquad \vec{s} = \{m;\ n;\ p\} \parallel l.$$

Рассмотрим их взаимное расположение (табл. 5.9).

Таблица 5.9

Взаимное расположение прямой и плоскости

Расположение	Условия
l параллельна плоскости Q (лежит в плоскости)	$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \ Am + Bn + Cp = 0$
Прямая l перпендикулярна плоскости Q	$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \ \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
Прямая l образует с плоскостью Q угол φ $\vec{s} \,\hat{}\, \vec{n}$?	$\sin\varphi = \cos(\vec{s} \,\hat{}\, \vec{n}) = \frac{\lvert \vec{s} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{s} \rvert \cdot \lvert \vec{n} \rvert}$

Пример 1. Найти: а) уравнение прямой l_1, проходящей через точки $M_1(2;\ 3;\ -4)$ и $M_2(5;\ 3;\ 0)$; б) уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M_0(-1; 5; 0)$ параллельно прямой l_1.

Решение.

а) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Здесь $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – координаты точки M_1, а $(x_2; y_2; z_2)$ – точки M_2. Получим:

$$l_1: \ \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z+4}{0+4}, \text{ или } \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{4}.$$

Вектор $\vec{s}_1 = \{3;\ 0;\ 4\}$ – направляющий вектор прямой l_1;

б) воспользуемся каноническим уравнением $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ прямой. Здесь $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – координаты точки M_0, а $\{m;\ n;\ p\}$ – координаты направляющего вектора прямой l_2. Так как $l_1 \parallel l_2$, а $\vec{s}_1 \parallel l_1$, то $\vec{s}_1 \parallel l_2$ и можно взять $\{m;\ n;\ p\} = \{3;\ 0;\ 4\}$. Получим l_2: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{0} = \frac{z}{4}$.

Так как в дроби $\frac{y-5}{0}$ в знаменателе стоит 0, нужно и числитель приравнять к нулю. Получим:

$$\begin{cases} y-5=0, \\ \frac{x+1}{3}=\frac{z}{4}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=5, \\ 4x-3z+4=0. \end{cases}$$

Мы получили прямую как линию пересечения двух плоскостей.

Пример 2. Заданы плоскость Q уравнением $2x-y+2z+5=0$ и точка $M_1(1;-3;4)$. Найти уравнение прямой, проходящей через M_1 перпендикулярно плоскости Q, и координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью Q.

Решение. Вектор нормали $\vec{n}=\{2;-1;2\}$ перпендикулярен плоскости Q и прямая $l \perp Q$, следовательно, $\vec{n} \parallel l$ и может быть взят в качестве направляющего вектора для l. Запишем канонические уравнения прямой l и получим из них параметрическое уравнение:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}=t, \text{ или } \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t-3, \\ z=2t+4. \end{cases}$$

Чтобы найти точку пересечения M_0 плоскости и прямой, выражения для x, y и z из параметрического уравнения прямой подставим в уравнение плоскости и найдем соответствующее значение параметра t:

$$2(2t+1)-(-t-3)+2(2t+4)+5=0,$$

$$9t+18=0, \quad t=-2.$$

Подставляя найденное значение параметра в параметрическое уравнение прямой l, найдем координаты точки M_0:

$$x_0=2(-2)+1=-3, \ y_0=2-3=-1, \ z_0=-4+4=0,$$

т. е. $M_0(-3;-1;0)$.

5.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. При каком значении a прямая $y=ax+b$ а) параллельна; б) перпендикулярна прямой $y=5-3x$?

2. Прямая $y=\sqrt{3}x-2$ пересекает ось Ox под углом а) $45°$; б) $30°$; в) $60°$?

3. В какой точке и под каким углом пересекаются прямые $x = 4$, $y = -3$?

4. Какой из координатных осей параллельна плоскость $2x - 3z + 4 = 0$?

5. Какой из координатных плоскостей параллельна плоскость $3x + 4 = 0$?

6. Какой из координатных осей перпендикулярна прямая $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{0}$?

7. Какой из указанных векторов а) $\{-3; 1; 4\}$; б) $\{2; 3; -1\}$ является направляющим для прямой $x = 2 - 3t, \quad y = 3 + t, \quad z = 4t - 1$?

8. Проходит ли прямая $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+1}{-6}$ через точку $M_1(5; 8; -13)$?

9. Пересекается ли прямая $\frac{x}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}$ с осью Oy?

10. Уравнение $ax^2 + 4y^2 = 9$ является уравнением окружности при а) $a = 4$; б) $a = 3$; в) $a = -4$?

11. Уравнение $9x^2 + by^2 = 8$ является уравнением эллипса при а) $b = 0$; б) $b = 9$; в) $b = 5$?

12. Уравнение $8x^2 - 3y^2 = 16$ является уравнением а) окружности; б) гиперболы; в) эллипса?

13. Уравнение $ax^2 + y^2 - 8x = 4$ является уравнением параболы при а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = -4$?

14. Уравнение $9x^2 + 2x + 9y^2 = 8$ является уравнением а) эллипса; б) окружности; в) гиперболы; г) параболы?

15. Уравнение $4x^2 + by^2 = 8$ является уравнением эллипса при а) $b = 4$; б) $b = 9$; в) $b = -9$?

16. Может ли эксцентриситет эллипса быть равным а) 1,2; б) 0,6?

17. Гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Уравнения ее асимптот имеют вид а) $y = \pm\frac{12}{5}x$; б) $y = \pm\frac{5}{13}x$; в) $y = \pm\frac{5}{12}x$; г) $y = \pm\frac{13}{5}x$?

18. Уравнение $8x^2 - 3y^2 = 16$ является уравнением а) окружности; б) эллипса; в) гиперболы?

19. Уравнение $ax^2 + 4y^2 - 8x + 9y = 0$ является уравнением параболы при а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = -1$; г) $a = 4$?

5.3. ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

1. Установить, проходит ли прямая $3x - 4y - 7 = 0$ через точки $M(2; -1)$, $N(1; -1)$, $K(0; 2)$.

2. Найти, при каком значении A прямая $3x + Ay - 5 = 0$ образует с осью Ox угол $\alpha = 135°$.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 4)$ и $M_2(-8; 1)$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5; -10)$ а) перпендикулярно прямой $y = \frac{2}{3}x - 1$; б) параллельно прямой $4x + 5y + 7 = 0$; в) параллельно Ox; г) параллельно Oy. Сделать рисунок.

5. Найти точку пересечения двух прямых $x - 6y = 13$, $5x + 2y = 1$ и острый угол между ними.

6. Даны вершины треугольника ABC $A(2;-1)$, $B(0;-2)$, $C(12;3)$. Найти уравнения а) стороны BC; б) медианы AM; в) высоты AD; г) найти длину высоты AD.

7. Найти расстояние между прямыми: $6x - 8y + 7 = 0$, $-3x + 4y + 9 = 0$.

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;-3)$ а) параллельно; б) перпендикулярно прямой AB, если $A(-1; 4), B(7; 4)$.

9. Найти координаты центра и радиус окружности а) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; б) $x^2 + y^2 + 3y = 4$; в) $x^2 + y^2 + 10x - 2y = 23$. Сделать рисунок.

10. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ и прямой $x - y - 4 = 0$.

11. Задан эллипс каноническим уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найти его полуоси, фокусы, вершины, эксцентриситет. Сделать рисунок.

12. Составить канонические уравнения эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если заданы

а) оси $2a = 14$; $2b = 8$;

б) полуось $a = 13$ и фокус $F(12; 0)$;

в) полуось $b = 2$ и точка на эллипсе $M(2; \sqrt{3})$;

г) ось $2a = 20$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;

д) ось $2b = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

13. Задана гипербола каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. Найти ее полуоси, фокусы, вершины, асимптоты, эксцентриситет. Сделать рисунок.

14. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, если заданы

а) полуось $a = 4$ и фокус $F(5; 0)$;

б) ось $2b = 10$ и фокус $F(13; 0)$;

в) ось $2b = 24$ и асимптоты $y = \pm\dfrac{12}{5}x$;

г) расстояние между фокусами $2c = 10$ и асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{2}x$;

д) асимптоты $y = \pm\sqrt{3}x$ и точка на гиперболе $M(2; \sqrt{3})$.

15. Задана парабола уравнением а) $y^2 = 8x$; б) $x^2 = 2y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -3y$. Найти ее параметр, координаты фокуса, уравнение директрисы, сделать рисунок.

16. Найти ось симметрии и координаты вершины параболы $x^2 + 4x - 5y + 3 = 0$. Сделать рисунок.

17. Найти точки пересечения параболы и прямой (сделать рисунок): а) $x^2 = 3 - y$; $x - y + 1 = 0$; б) $y^2 = 4x - 3$; $2x - 3y - 5 = 0$.

18. Найти точки пересечения плоскости $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ с осями координат. Сделать рисунок.

19. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; 3; 6)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $B(1; 7; 5)$.

20. Найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(2; -1; 1)$, $M_2(5; 5; 4)$, $M_3(3; 2; -1)$.

21. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 4)$ параллельно а) плоскости $5x - y + 2z - 16 = 0$; б) плоскости Oxy; в) плоскости Oyz; г) плоскости Oxz.

22. Найти расстояние от точки $M_0(3;-4;1)$ до плоскости $3x-6y+2z-14=0$.

23. Найти, при каком λ плоскости $2x-\lambda y+5z-1=0$ и $\lambda x+3\lambda y+z+9=0$ будут перпендикулярны.

24. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;-3;1)$ и $M_2(0;4;5)$.

25. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-4;0;5)$ а) параллельно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z+9}{-11}$; б) перпендикулярно плоскости $3x-6y+7z-12=0$.

26. Найти, при каких α и β прямые, заданные уравнениями $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-7}{-3}$ и $x=3t+1,\ y=\beta t,\ z=6t-3$, будут параллельны.

27. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{5}$ и плоскости $2x+5y-z+1=0$.

28. Даны вершины треугольной призмы $A_1(1;-2;3)$, $B_1(1;4;-5)$, $C_1(-1;2;-3)$, $A_2(-2;3;4)$.

Найти:

а) уравнение ребра A_1B_1;

б) уравнение ребра A_2B_2;

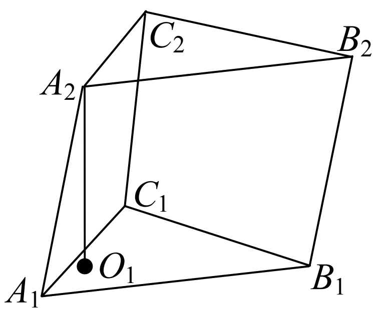
в) уравнения плоскостей оснований $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$;

г) уравнение высоты A_2O_1;

д) длину высоты A_2O_1;

е) координаты точки O_1;

ж) угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1B_1.



Минимум для аудиторной работы

1; 2; 5; 6; 8; 9. в); 12. б), в), д); 13; 14. а), в), г); 15; 16; 17. б); 18; 19; 20; 21; 23; 24; 25; 27; 28. а), г), е), ж).

5.4. ОТВЕТЫ

1. Проходит через точку N. **2.** A = 3. **3.** $3x-11y+35=0$. **4.** а) $3x+2y+5=0$; б) $4x+5y+30=0$; в) $y=-10$; г) $x=5$. **5.** (1; –2), $arctg\left(\dfrac{32}{7}\right)$. **6.** а) $5x-12y-24=0$; б) $3x-8y-14=0$; в) $12x+5y-19=0$;

г) $AD=\frac{2}{13}$. **7.** 2,5. **8.** а) $y=-3$; б) $x=5$. **9.** а) (2; 0); $R=2$; б) $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$; $R=\frac{5}{2}$; в) (–5; 1); $R=7$. **10.** $(-1;-5)$, (6; 2). **11.** $a=5$, $b=4$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$, $\varepsilon=0{,}6$. **12.** а) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; д) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. **13.** $a=6$, $b=8$, $F_1(-10;0)$, $F_2(10;0)$, $A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$; $y=\pm\frac{4}{3}x$; $\varepsilon=\frac{5}{3}$. **14.** а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; г) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; д) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$. **15.** а) $p=4$, $F(2;0)$, $x=-2$; б) $p=1$, $F\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $y=-\frac{1}{2}$; в) $p=2$, $F(-1;0)$, $x=1$; г) $p=\frac{3}{2}$, $F\left(0;-\frac{3}{4}\right)$, $y=\frac{3}{4}$. **16.** $x=-2$; $(-2;-0{,}2)$. **17.** а) (–2; –1), (1; 2); б) (1; –1), (13; 7). **18.** (6; 0; 0); (0; –4; 0); (0; 0; 3). **19.** $2x+4y-z-4=0$. **20.** $7x-3y-z-16=0$. **21.** а) $5x-y+2z-21=0$; б) $z=4$; в) $x=2$; г) $y=-3$. **22.** $d=3$. **23.** $\lambda=-1, \lambda=\frac{5}{3}$. **24.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{4}$. **25.** а) $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-5}{-11}$; б) $\frac{x+4}{3}=\frac{y}{-6}=\frac{z-5}{7}$. **26.** $\alpha=-\frac{3}{2}, \beta=4$. **27.** (7; –1; 10). **28.** а) $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-3}{-8}$; б) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-4}{-8}$; в) $x-4y-3z=0$, $x-4y-3z+26=0$; г) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{-3}$; д) $\sqrt{26}$; е) $O_1(-1;-1;1)$; ж) $\cos\varphi=\frac{22}{10\sqrt{35}}\approx 0{,}3719$, $\varphi\approx 68^\circ 11'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1984.

3. Бугров, Я. С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1983.

4. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: Тетрасистемс, 2003. – 2 т.

5. Высшая математика: типовая учебная программа для высших учебных заведений по химико-технологическим, лесотехническим, полиграфическим специальностям / сост. В. М. Марченко [и др.]. – Минск: БГТУ, 2009.

6. Ильин, В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М.: Наука, 1979.

7. Мантуров, О. В. Курс высшей математики / О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1986.

8. Методическое пособие по курсу «Высшая математика»: в 5 ч. / сост.: Е. А. Островский, Л. И. Жилевич, М. З. Дубкова. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1986–1990. – 5 ч.

9. Методическое пособие по разделу «Математическое программирование» курса «Прикладная математика» для студентов специальности 0902 / сост. В. М. Марченко, В. И. Янович. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1987.

10. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005. – 2 т.

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2003. – 2 ч.

12. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учеб. пособие / под ред. М. И. Сканави. – М.: Высш. школа, 1978.

13. Трехуровневые задания по дисциплине «Высшая математика»: в 4 ч. / сост.: Ж. Н. Горбатович [и др.]. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1988–1991. – 4 ч.

14. Шипачев, В. С. Высшая математика: учеб. для немат. специальностей вузов / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2003.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марченко Владимир Матвеевич
Асмыкович Иван Кузьмич
Борковская Инна Мечиславовна и др.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях

Часть 1

Учебное пособие

Редакторы *О. А. Готовчик*, *М. В. Лобач*
Компьютерная верстка *П. В. Прохоровская*

Подписано в печать 24.12.2010. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 12,4.
Тираж 1200 экз. Заказ .

Отпечатано в Центре издательско-полиграфических
и информационных технологий учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.

Переплетно-брошюровочные процессы
произведены в ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
220600. Минск, Красная, 23. Заказ .